Metody aplikované matematiky

D. Janovská
Ústav matematiky, VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6
e-mail: janovskd@vscht.cz

13. února 2011

1 Úvod

Diskrétní metody řešení diferenciálních rovnic jako např. metoda sítí umožňují najít řešení diferenciální rovnice pouze v diskrétních bodech dané oblasti. Přibližná řešení, kterými se budeme zabývat v našem příspěvku, jsou spojitá, a tedy umožňují zjistit přibližné řešení v libovolném bodě dané oblasti a na její hranici.

Kapitola 2 je věnována metodě vážených residuí. Tato metoda je sice jednou z nejstarších metod pro numerické řešení diferenciálních rovnic, ale současně je nedílnou součástí moderních balíků programů. Uvedeme základní myšlenku a dvě konkrétní varianty této metody: metodu kolokací a metodu nejmenších čtverců. Metodu vážených residuí lze považovat za předchůdce metody konečných prvků, což byl hlavní důvod jejího zařazení do tohoto výkladu.

Metoda konečných prvků je jedním ze základních moderních nástrojů, které umožňují numerické řešení diferenciálních rovnic, zejména parciálních diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu. Je založena na variační formulaci okrajové úlohy a aproximuje přesné řešení po částech polynomiálními funkcemi (nám zde postačí funkce po částech lineární). Jejím základům je věnována kapitola 6. Nejprve uvedeme nezbytné minimum funkcionální analýzy tak, abychom byli schopni zformulovat diferenciální problém variačně a následně rozhodnout o existenci slabého řešení našeho problému a toto řešení najít. Základní myšlenku metody konečných prvků ukážeme na jednoduchých jednodimenzionálních úlohách. V závěru se budeme zabývat metodou konečných prvků pro řešení diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu.

2 Metoda vážených residuí

Řešme následující okrajovou úlohu:

$$L(u) = f \qquad \text{na} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

$$B(u) = r \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega\,. \tag{2}$$

Protože hledáme spojitou aproximaci přesného řešení, předpokládáme, že přibližné řešení $\widehat{u}$ má tvar

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{P} \alpha_m N_m(\mathbf{x})\,, \quad \text{kde} \tag{3}$$

Ψ je známá funkce, která splňuje přesně okrajovou podmínku na Γ, N_m je lineárně nezávislý systém známých tzv. testovacích funkcí, který splňuje

$$N_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad \forall m\,,$$

α_m jsou neznámé konstanty, které hledáme tak, aby chyba aproximace byla minimální (obvykle pro jednoduchost $\widehat{u}$ je lineární v α_m) a P je konečné číslo. Tedy spojitý problém (1), (2), který má nekonečně mnoho stupňů volnosti, redukujeme na přibližně ekvivalentní problém s P stupni volnosti. Úloha vede k řešení P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých α_m.

Poznámka 2.1 *Poznamenejme, že v počátečních úlohách funkce Ψ, N_m i koeficienty α_m závisí na čase t:*

$$\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)\,, \quad N_m = N_m(\mathbf{x}, t)\,, \quad \alpha_m = \alpha_m(t)\,.$$

Označme R_Ω residuum na oblasti Ω, R_Γ hraniční residuum:

$$R_\Omega = L(\widehat{u}) - f \quad \text{v } \Omega\,, \qquad R_\Gamma = B(\widehat{u}) - r \quad \text{na } \Gamma\,.$$

Metoda vážených residuí vyžaduje, aby **vážené integrály residuí** byly **nulové**:

$$\int_\Omega w_i R_\Omega \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \overline{w}_i R_\Gamma \mathrm{d}\Gamma = 0\,, \tag{4}$$

kde $w_i = w_i(\mathbf{x})$, $\overline{w}_i = \overline{w}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, P$, jsou dva (obecně různé) lineárně nezávislé systémy váhových funkcí.

Je-li rovnice (4) splněna pro všechna $i = 1, \ldots P$, $P \longrightarrow +\infty$, pak $R_\Omega \longrightarrow 0$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ a $R_\Gamma \longrightarrow 0$ $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$.

Metody vážených residuí lze rozdělit na tři typy metod:

a) vnitřní metody - to jsou takové metody, pro které platí $R_\Gamma = 0$, neboli přibližné řešení splňuje okrajové podmínky přesně, diferenciální rovnici (a počáteční podmínky) přibližně;

b) hraniční metody - to jsou metody, pro které $R_\Omega = 0$, tj. diferenciální rovnice (a počáteční podmínky) je splněna přesně, zatímco okrajové podmínky aproximujeme;

c) smíšené metody - přibližné řešení nesplňuje přesně ani okrajové podmínky, ani diferenciální rovnici, tj. $R_\Gamma \neq 0$, $R_\Omega \neq 0$.

2.1 Vnitřní metody

Funkci Ψ a testovací funkce N_m vybíráme tak, aby hraniční residuum bylo nulové, tj. aby na Γ bylo $B(\widehat{u}) = r$, $N_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots, P$. Přibližné řešení $\widehat{u}$ hledáme ve tvaru (3) a rovnice (4) se redukuje na rovnici

$$\int_\Omega w_i R_\Omega \mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{5}$$

Uvědomme si, že řešíme-li diferenciální rovnici, musíme aproximovat také příslušné parciální derivace, které v rovnici vystupují. Je-li např. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, pak

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{P} \alpha_m N_m(\mathbf{x})\,, \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{P} \alpha_m \frac{\partial N_m}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Předpokládejme, že L je lineární diferenciální operátor, a dosaďme přibližné řešení do rovnice (5):

$$\int_\Omega w_i R_\Omega \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega w_i (L(\widehat{u}) - f)\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega w_i (L(\Psi) + L(\sum_{m=1}^{P} \alpha_m N_m) - f)\mathrm{d}\Omega = 0\,,\ i = 1, \ldots, P\,.$$

Dostaneme soustavu P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}\,, \tag{6}$$

kde prvky $k_{im},\ i, m = 1, \ldots, P$, matice $\mathbf{K}$ a složky $b_i,\ i = 1, \ldots, P$, vektoru pravých stran $\mathbf{b}$ mají tvar:

$$k_{im} = \int_\Omega w_i L(N_m)\mathrm{d}\Omega\,, \quad b_i = \int_\Omega w_i f \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega w_i L(\Psi)\mathrm{d}\Omega\,,$$

složky vektoru $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_P)^{\mathrm{T}}$ jsou hledané koeficienty lineární kombinace bázových funkcí v (3).

Výsledná $\alpha_1, \ldots, \alpha_P$ dosadíme do (3) a získáme hledané přibližné řešení $\widehat{u}$.

Pro hraniční a smíšené metody vážených residuí je postup odvození výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic zcela analogický. Slabinou metod typu vážených residuí je, že matice $\mathbf{K}$ je obecně plná, nesymetrická, nemá pásovou strukturu.

2.2 Volba váhových funkcí

Zatím jsme se nezabývali konkrétním výběrem váhových funkcí. Podle jejich volby dostaneme různé metody. Uveďme alespoň dvě.

2.2.1 Kolokační metoda

Zvolme za váhové funkce w_i Diracovy $\delta-$funkce:

$$w_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, P\,,$$

přičemž platí

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \\ \infty & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \end{cases} \qquad \int_{\mathbf{x}<\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}>\mathbf{x}_i} G(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\mathrm{d}\Omega = G(\mathbf{x}_i)\,.$$

Podrobná definice a popis vlastností Diracovy $\delta-$funkce přesahuje rámec tohoto příspěvku. Připomínáme jen, že Diracova $\delta-$funkce je tzv. distribuce (=zobecněná funkce, nikoliv funkce). Podrobnosti najde čtenář například v [11].

Dosadíme-li tyto váhové funkce do rovnice (5), dostaneme

$$\underbrace{\int_\Omega w_i R_\Omega \mathrm{d}\Omega} = \int_\Omega w_i (L(\Psi) + L(\sum_{m=1}^{P} \alpha_m N_m) - f)\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$= \int_\Omega \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R_\Omega(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega = R_\Omega(\mathbf{x}_i)\,,\ i = 1, \ldots, P\,.$$

Jinými slovy, tento výběr váhových funkcí je ekvivalentní požadavku, aby residuum bylo rovno nule v P libovolně vybraných bodech $\mathbf{x}_i \in \Omega$ (tzv. kolokačních bodech). S rostoucím P je residuum nulové ve více a více bodech.

Klíčovou otázkou ovšem je, kam umístit kolokační body. Jejich rozmístění v Ω hraje rozhodující roli pro konvergenci získaného přibližného řešení k přesnému řešení daného problému. Lze ukázat, že pro obyčejné diferenciální rovnice je residuum minimální, zvolíme-li kolokační body jako kořeny Čebyševových polynomů.

Příklad 2.1 *Metodou kolokací hledejme řešení rovnice*

$$u''(x) + u(x) + x^2 = 0 \quad , \quad x \in (0;1) \quad , \tag{7}$$

splňující okrajovou podmínku

$$u(0) = u(1) = 0 \quad . \tag{8}$$

Testovací funkce volíme dle následujícího předpisu:

$$\widehat{u}^{(P)}(x) = \sum_{j=1}^{P} \alpha_j x^j (1-x) \quad , \tag{9}$$

kde P je počet kolokačních bodů.

Řešení získané pomocí jednoho kolokačního bodu:
Pro $P = 1$ získáme dosazením do (9) testovací funkci ve tvaru:

$$\widehat{u}^{(1)}(x) = \alpha_1 x(1-x)\,.$$

Tuto testovací funkci dosadíme do rovnice (7) a dostaneme

$$R_\Omega(x) = -2\alpha_1 + \alpha_1 x(1-x) + x^2 = \alpha_1(-2 + x - x^2) + x^2 = 0\,.$$

Zvolíme-li např. kolokační bod $x = \frac{1}{2}$, je $\alpha_1 = \frac{1}{7}$ a přibližné řešení

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{7} x(1-x)\,.$$

Řešení získané pomocí dvojice kolokačních bodů:
Testovací funkce pro dva kolokační body má tvar:

$$\widehat{u}^{(2)}(x) = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \quad .$$

Pak

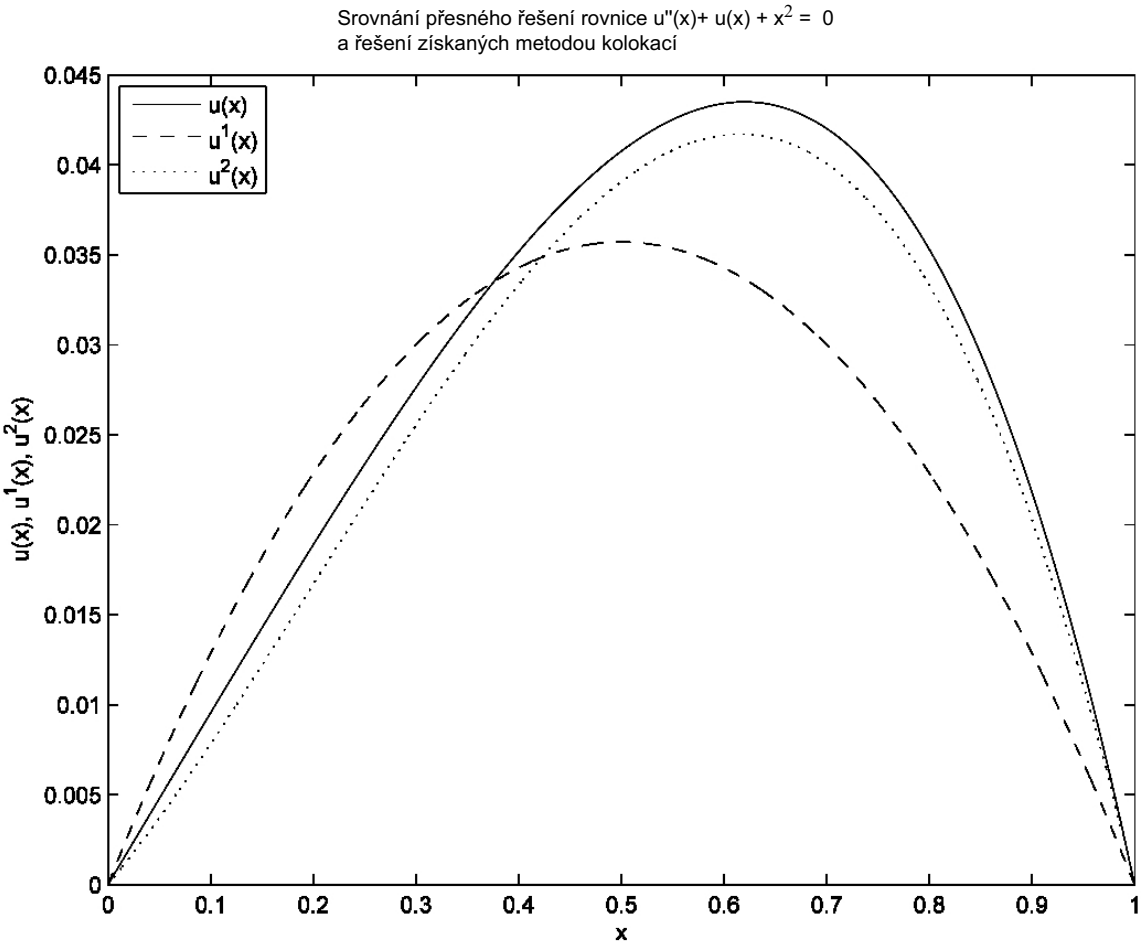
$$\begin{aligned} R_\Omega(x) = & \; -2(\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_2 x) + \alpha_1(x - x^2) + \alpha_2(x^2 - x^3) + x^2 = \\ = & \; \alpha_1(x - 2 - x^2) + \alpha_2(-x^3 + x^2 - 6x + 2) + x^2 = 0 \end{aligned}$$

a zvolíme-li kolokační body např. $x = \frac{1}{3}$ a $x = \frac{2}{3}$ dostaneme $\alpha_1 = \frac{29}{416}$, $\alpha_2 = \frac{9}{52}$. Výsledné přibližné řešení pro tyto dva kolokační body je tedy

$$\widehat{u}^{(2)}(x) = \frac{29}{416} x(1-x) + \frac{9}{52} x^2(1-x)\,.$$

Snadno lze ověřit, že přesné řešení úlohy (7), (8) je

$$u(x) = \frac{2\cos 1 - 1}{\sin 1} \sin x - 2\cos x - x^2 + 2.$$



□

2.2.2 Metoda nejmenších čtverců

Zvolíme-li za váhové funkce w_i funkce

$$w_i = \frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i}\,, \quad i = 1, \ldots, P\,,$$

a dosadíme-li tyto funkce do rovnice (5), dostaneme

$$\int_\Omega w_i R_\Omega \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i}\right) R_\Omega \mathrm{d}\Omega = 0\,,$$

a tedy dostaneme metodu nejmenších čtverců:
Položme (v_1 je tzv. "tuning" parametr, nezávisí na α_i a je vybírán libovolně, obvykle $v_1 = 1$)

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_P) = \int_\Omega v_1 (R_\Omega)^2 \mathrm{d}\Omega$$

a minimalizujme E vzhledem k α_i. Všechny první parciální derivace funkce E musí být nulové:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 2 \int_\Omega v_1 \left(\frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i}\right) R_\Omega \mathrm{d}\Omega = 0\,,\ i = 1, \ldots, P\,.$$

Dostaneme opět soustavu P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{b}\,.$$

Matice $\mathbf{K}$ je sice symetrická, ale často špatně podmíněná.

Nebudeme se podrobně zabývat metodami numerického řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Čtenář jich najde velké množství např. v [4] (klasické metody i metody blokové a metody vhodné pro velké řídké matice soustavy), [5] (iterační metody, metoda sdružených gradientů), [12] (iterační metody), [15] (víceúrovňové metody), [13] (klasická učebnice numerické matematiky). Stručný přehled těchto metod může čtenář najít i v [9].

Poznámka 2.2 *Zmiňme se ještě o jedné metodě – předchůdci metody konečných prvků. Je to tzv. Bubnova-Galerkinova metoda, která požaduje, aby váhové a testovací funkce byly stejné lineárně nezávislé systémy funkcí:*

$$w_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, P.$$

Dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{b}\,, \ \textit{kde } \mathbf{K} \textit{ je symetrická matice}\,,$$

$$\mathbf{K}_{im} = \int_\Omega N_i L(N_m) \mathrm{d}\Omega\,, \quad i, m = 1, 2, \ldots, P.$$

2.3 Příklady

1.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = 0\,, \quad \text{pro} \quad x \in (0,1)\,,$$
$$\varphi(0) = 0\,, \quad \varphi(1) = 1\,.$$

Řešení aproximujte funkcí
$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_m \sin\frac{m\pi x}{2}$$
a určete celkové residuum $R = R_\Omega + R_\Gamma$.

2.
$$-2u\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4\,, \quad \text{pro} \quad x \in (0,1)\,,$$
$$u(0) = 1\,, \quad u(1) = 0\,.$$

Řešení aproximujte funkcí
$$\widehat{u}(x) = \sum_{n=1}^{3} \alpha_n \sin(n\pi x)$$
a určete celkové residuum $R = R_\Omega + R_\Gamma$.

3. Stacionární vedení tepla bez zdroje

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{T}}{\mathrm{d}y^2} = 0\,, \quad \text{pro} \quad x \in (-1,1)\,, \quad y \in (-1,1)\,,$$

$$T = 0 \quad \text{pro} \quad y = \pm 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \cos\frac{\pi y}{2} \quad \text{pro} \quad x = \pm 1\,.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{T}(x,y) = \sum_{m=1}^{5} \alpha_m N_m(x,y)\,, \quad \text{kde}$$

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(x,y) & = & 1 - y^2\,, & N_2(x,y) & = & (1-y^2)x^2\,, \\ N_3(x,y) & = & (1-y^2)y^2\,, & N_4(x,y) & = & (1-y^2)x^2y^2\,, \\ N_5(x,y) & = & (1-y^2)x^4\,. & & & \end{array}$$

Určete celkové residuum $R = R_\Omega + R_\Gamma$.

4.

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u + x^2 = 0\,, \quad \text{pro} \quad x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Přesné řešení:

$$u(x) = 2 - 2\cos x - \frac{1 - 2\cos 1}{\sin 1}\sin x - x^2\,.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^{P} \alpha_j x^j (1-x) \qquad (N_j(x) = x^j(1-x))\,.$$

Metodou kolokací a metodou nejmenších čtverců najděte přibližné řešení pro $P = 1$, $P = 2$ Výsledky porovnejte (vzájemně i s přesným řešením). Vše znázorněte graficky.

5. **Vedení tepla**

$$k\,\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + S(x) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

$$T(0) = T(1) = 0\,, \quad k := 0{,}01\,, \quad S(x) = x^5\,.$$

Přibližné řešení hledejte ve tvaru

$$\widehat{T}(x) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_m x(1 - x^m)\,.$$

1. Vypočtěte přesné řešení.
2. Určete celkové residuum $R_x = R_\Omega + R_\Gamma$.
3. Použitím kolokační metody určete $\alpha_1,\ \alpha_2$. Za kolokační body zvolte

$$x = \frac{1}{3}\,, \quad x = \frac{2}{3}\,.$$

3 Minimum funkcionální analýzy

Než se budeme moci zabývat metodou konečných prvků, musíme se seznámit alespoň stručně se základy funkcionální analýzy. Pro zvídavé čtenáře lze k podrobnějšímu studiu funkcionální analýzy doporučit např. klasickou učebnici [14] nebo skripta [16].

Metoda konečných prvků je založena na variační formulaci dané úlohy a umožňuje nám najít tzv. slabé řešení.
Uvažujme okrajovou úlohu:

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{v } \Omega\,, \tag{10}$$
$$Su(x) = g(x) \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega \tag{11}$$

Tuto úlohu lze formulovat jako tzv. variační úlohu:
? $u \in H$ $\qquad$ ($H \ldots$ Hilbertův)

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H\,, \qquad \text{(Galerkin)} \tag{12}$$

kde $a(u,v)$ je nějaká bilineární forma a F je lineární spojitý funkcionál na H.
Náš problém můžeme rovněž formulovat jako úlohu pro hledání řešení jisté operátorové rovnice

$$Tu = y\,, \qquad \text{(Ritz)} \tag{13}$$

kde řešení $u \in H$ je bod, v němž jistý tzv. energetický funkcionál nabývá svého minima. Platí i naopak: Je-li $u \in H$ takové, že v u nabývá energetický funkcionál svého minima, je toto u řešením naší operátorové rovnice.

Abychom si mohli ukázat všechny souvislosti, musíme se nejprve zabývat některými důležitými pojmy z funkcionální analýzy detailněji.

3.1 Základní pojmy

$V \ \ldots$ lineární prostor

$$u, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ \Rightarrow\ \lambda u + \mu v \in V \quad + \quad 8 \text{ axiomů} \tag{14}$$

$L : V \longrightarrow \mathbb{R} \ \ldots$ lineární funkcionál

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) \quad \forall u, v \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Příklad 3.1

$$V = \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle), \qquad L(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

□

$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ \ldots$ bilineární forma
(a je funkce lineární v každém jednotlivém argumentu)

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u,w) + \mu a(v,w) \\ a(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda a(w,u) + \mu a(w,v) \end{aligned} \quad \forall u, v, w \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Příklad 3.2

$$a(v,w) = \int_a^b v(x)w(x)\mathrm{d}x, \qquad v,w \in L^2(\langle a,b\rangle)$$

□

Definice 3.1 *Říkáme, že*
$a(.,.)$ *je symetrická bilineární forma* $\iff$ $a(w,v) = a(v,w)\ \forall v,w \in V$
$a(.,.)$ *je positivně definitní bilineární forma* $\iff$ $a(v,v) > 0\ \forall v \in V,\ v \neq 0$
$a(\,.,.)$ *je omezená bilineární forma na* V*, jestliže* $\exists$ *konstanta* $M > 0$ *tak, že*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|\|w\| \qquad \forall v,w \in V\,. \tag{17}$$

Symetrická bilineární forma $a(\,.,.)$ *je koercivní (V-eliptická) na* V*, jestliže existuje kladná konstanta* α *tak, že*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \qquad \forall\ v \in V\,. \tag{18}$$

$a(\,u,v)$ *symetrická, koercivní bilineární forma* $\Longrightarrow$ $a(\,.,.)$ *je positivně definitní skalární součin na* V *(značení:* $(\,.,.)$, $(\,.,.)_V$ *)* ... *positivně definitní, symetrická bilineární forma na* V

Příklad 3.3

$$V = \mathbb{R}^n, \quad (u,v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n,\ v = (v_1,\dots v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$V = L^2(\Omega), \quad (u,v) = \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ otevřená}$$

□

Lineární prostor, na němž je definován skalární součin ... prostor se skalárním součinem

Každý lineární prostor se skalárním součinem je normovaný lineární prostor (n.l.p):
V lineární prostor, $(\,.,.)$ skalární součin na V, normu na V definujeme předpisem:

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} \qquad \forall v \in V \tag{19}$$

(označení $\|.\|$, $\|.\|_V$)

Definice 3.2 *Norma na lineárním prostoru* V *je funkce*

$$\|\ .\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+\ :$$

1. $\|v\| > 0\ \forall v \in V,\ v \neq 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|\ \forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(ev. \lambda \in \mathbb{C})$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in V$

Poznámka 3.1 *Poznamenejme, že*
a) Nahradíme-li 1. požadavkem
$1'$. $|v| \geq 0 \ \forall v \in V \ + \ 2. \ + \ 3. \ \Rightarrow \ |\,.\,|$ *seminorma (může být nulová i pro nějaké nenulové v)*
b) $v, w \in V$ jsou ortogonální $\iff$ $(v, w) = 0$
c) Cauchyova-Schwarzova nerovnost:

$$|(w, v)| \leq \|w\| \cdot \|v\| \quad \forall v, w \in V \tag{20}$$

(rovnost platí pouze pro $w = \lambda v$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$)

Příklad 3.4 *Příklad seminormy:*
$V = \{v \in \mathcal{C}^1(a, b), \ \sup\limits_{x \in (a,b)} |v'(x)| < \infty\} \ldots$ *prostor hladkých funkcí s omezenou derivací*
$|v| = \sup\limits_{x \in (a,b)} |v'(x)| \ \ldots$ *seminorma na V* □

Konvergence ve V: $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$
Řekneme, že posloupnost $\{v_i\}$ konverguje k $v \in V$, tj. $v_i \longrightarrow v$ pro $i \longrightarrow \infty$
($\lim\limits_{i \to \infty} v_i = v$), jestliže

$$\|v_i - v\| \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad i \longrightarrow \infty$$

Definice 3.3 *Řekneme, že posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ je Cauchyovská ve V, jestliže $\|v_i - v_j\| \longrightarrow 0$ pro $i, j \longrightarrow \infty$, přesněji jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall i, j \geq n_0 \ \|v_i - v_j\| < \varepsilon$$

Definice 3.4 *Prostor V se skalárním součinem nazýváme úplný, jestliže každá Cauchyovská posloupnost má limitu ve V:*

$$\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \ \textit{Cauchyovská}\ , \quad \lim_{i \to \infty} v_i = v \quad a \quad v \in V\ .$$

Úplný prostor se skalárním součinem ... Hilbertův prostor
Úplný normovaný lineární prostor ... Banachův prostor

Poznámka 3.2 *Pozor! Ne všechny normované lineární prostory jsou prostory se skalárním součinem*

Příklad 3.5 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená,*

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \ \ldots \ \textit{skalární součin v } L^2(\Omega)$$

$L^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertův prostor. Je to jediný Hilbertův prostor ze všech Lebesgueovských L^p-prostorů, viz odstavec 3.6.2. □

3.1.1 Příklady normovaných a Banachových prostorů

1. Vektorový prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel je normovaný Banachův prostor vzhledem k normě $||x|| = |x|\,,\ x \in \mathbb{R}$ ($|x| \ldots$ absolutní hodnota reálného čísla x).

2. Vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ je normovaný Banachův prostor vzhledem k následujícím normám:

   1. $||a||_1 = |x| + |y|\,$, kde $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   2. $||a||_2 = \max\{|x|, |y|\}$;
   3. $||a||_3 = (x^2 + y^2)^{1/2}\,$.

3. Vektorový prostor $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je normovaný Banachův prostor vzhledem k normě $||z|| = |z|\,,\ z \in \mathbb{C}$ ($|z| \ldots$ absolutní hodnota komplexního čísla z).

4. Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ všech uspořádaných $n-$tic $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel je normovaný Banachův prostor vzhledem k následujícím normám:

   1. $||x||_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
   2. $||x||_2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$;
   3. $||x||_3 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, kde $1 \le p < \infty$;

      prostor $\mathbb{R}^n$ s touto normou se obvykle označuje $\ell_p^n\,$.
   4. $||x||_4 = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}\,$,

      prostor $\mathbb{R}^n$ s touto normou se obvykle označuje $\ell_\infty^n\,$.

5. Vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech reálných spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ je normovaný prostor vzhledem k následujícím normám:

   1. $||f||_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;
   2. $||f||_2 = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$;
   3. $||f||_3 = \displaystyle\sup_{a\le x\le b} |f(x)|\,$.

   Prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ je normovaný Banachův vektorový prostor s normou $||.||_3$. Ukážeme, že $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ je také normovaný vektorový prostor s normou $||.||_2$, ale není v této normě Banachův.

   a) $||f|| \ge 0$ protože $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t \ge 0$. $||f|| = 0 \iff |f(t)|^2 = 0 \iff f(t) = 0$.

   b) $||\alpha f|| = \left(\displaystyle\int_a^b |\alpha f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = |\alpha|\,||f||$.

   c) $||f+g|| = \left(\displaystyle\int_a^b |f+g|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le \left(\displaystyle\int_a^b |f|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\displaystyle\int_a^b |g|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = ||f|| + ||g||$ (podle

Minkowského nerovnosti).
Tedy $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ je s touto normou také normovaný vektorový prostor.

Abychom ukázali, že $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ není s integrální normou Banachův, uvažujme následující příklad: Nechť $a=-1$, $b=1$,

$$f_n(t)=\begin{cases} 0, & -1\le t\le 0,\\ nt, & 0<t<\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{n}<t\le 1\,. \end{cases}$$

Posloupnost $\{f_n(t)\}$ je Cauchyovská v $\mathcal{C}[-1,1]$, ale nekonverguje k žádnému prvku $\mathcal{C}[-1,1]$.

6. Vektorový prostor $P[0,1]$ všech polynomů na $[0,1]$ s normou $||x||=\sup\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$ je normovaný prostor.

7. Nechť $p\ge 1$ (p ne nutně přirozené číslo). $\mathcal{L}^p$ označuje třídu všech reálných funkcí $f(t)$, takových, že $f(t)$ je definovaná pro s.v. t (= pro všechna t až na množinu míry nula), je měřitelná a $|f(t)|^p$ je Lebesgueovsky integrovatelná na $(-\infty,+\infty)$. Definujme na $\mathcal{L}^p$ následující relaci ekvivalence:

$$f(t)\sim g(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(t)=g(t)\ s.v.$$

Množina všech tříd ekvivalence, na které je $\mathcal{L}^p$ takto rozděleno, se označuje L^p nebo L_p. L_p je vektorový prostor a normovaný prostor vzhledem k normě

$$||f^{(1)}||=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f^{(1)}(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

kde $f^{(1)}$ reprezentuje třídu ekvivalence $[f]$. Místo intervalu $(-\infty,+\infty)$ bychom mohli uvažovat interval $(0,+\infty)$ nebo libovolný konečný interval (a,b) nebo libovolnou měřitelnou množinu E.
Chápeme-li rovnost v obvyklém smyslu, není $\mathcal{L}^p$ normovaný prostor. Je to však seminormovaný prostor, což znamená, že $||f||=0$ i když $f\ne 0$.
Poznamenejme ještě, že nulový prvek L^p je třída ekvivalence, která obsahuje všechny funkce $f\in\mathcal{L}^p$, pro které je $f(t)=0$ s.v.

8. Vektorový prostor $C^\infty[a,b]$ všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na $[a,b]$ je normovaný prostor vzhledem k normě

$$||f||_{n,p}=\left(\int_0^b\sum_{i=0}^n|D^if(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}, \qquad 1\le p\le\infty\,,$$

kde D^i označuje i-tou derivaci.
Poznamenejme, že vektorový prostor $\mathcal{C}^\infty[a,b]$ může být normován nekonečně mnoha způsoby.

9. Nechť $\mathcal{C}^k(\Omega)$ označuje prostory všech reálných funkcí n proměnných definovaných na Ω (otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$), které jsou spojitě diferencovatelné až do řádu k. Nechť

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kde $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$, jsou nezáporná přirozená čísla a $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Pak pro $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ existují a jsou spojité derivace

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}\,, \quad |\alpha| \le k.$$

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ je normovaný prostor vzhledem k normě

$$||f||_{k,\alpha} = \max_{0 \le |\alpha| \le k} \{\sup |D^\alpha f|\}\,.$$

10. Nechť $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem na Ω (otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$). $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ je normovaný prostor vzhledem k normě

$$||f||_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

3.2 Podprostory a projekce

V ... Hilbertův, $V_0 \subset V$ lineární podprostor
Řekneme, že V_0 je uzavřený, jestliže obsahuje limity všech posloupností ve V_0, tj.

$$\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset V_0\,, \quad v_j \longrightarrow v \text{ pro } j \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad v \in V_0$$

V tomto případě je V_0 také Hilbertův se stejným skalárním součinem jako V.

Nechť $V_0 \subset V$ je uzavřený. Pak každý prvek $v \in V$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$v = v_0 + u, \quad \text{kde} \quad v_0 \in V_0 \quad \text{a} \quad u \quad \text{je ortogonální k} \quad V_0. \tag{21}$$

Prvek v_0 můžeme charakterizovat jako jednoznačně určený prvek ve V_0 nejbližší k v (tzv. věta o projekci), tj.

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\| \tag{22}$$

v_0 ... ortogonální projekce v na V_0 (značení: $v_0 = P_{V_0} v$)

Důsledek: Jestliže uzavřený lineární podprostor V_0 není roven celému V, pak má normálový vektor, tj.
existuje $u \neq 0,\ u \in V$, které je ortogonální k V_0: $(u, w) = 0\ \forall w \in V_0$.

Řekneme, že dvě normy $\|\,.\,\|_a$, $\|\,.\,\|_b$ jsou ekvivalentní na V, jestliže existují kladné konstanty c, C takové, že

$$c \cdot \|v\|_b \le \|v\|_a \le C \cdot \|v\|_b \qquad \forall v \in V \tag{23}$$

Příklad 3.6 $V = \mathbb{R}^n$
a) normy

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |v_i| \quad a \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

jsou ekvivalentní, protože

$$\|v\|_\infty \le \|v\|_1 \le n\|v\|_\infty \qquad \forall v \in V$$

b) normy $\|v\|_2$ a $\|v\|_\infty$ jsou ekvivalentní, protože

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \qquad \|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \sqrt{n}\|v\|_\infty \quad \forall v \in V.$$

□

Platí dokonce věta:
Je-li U konečnědimenzionální normovaný lineární prostor, pak všechny normy na U jsou ekvivalentní.

Příklad 3.7 V = *prostor omezených integrovatelných funkcí na* $\langle 0,1\rangle$.
Normy

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)| \quad a \quad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < \infty\,,$$

nejsou ekvivalentní. □

3.3 Operátory

V, W dva Hilbertovy prostory, $B : V \longrightarrow W$ lineární operátor.
Řekneme, že B je omezený $\iff$ existuje konstanta C tak, že

$$\|Bv\|_W \le C\,\|v\|_V \qquad \forall v \in V \tag{24}$$

Norma omezeného lineárního operátoru B:

$$\|B\| = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V} \le \|B\| \quad \text{t.j.}$$

$$\|Bv\|_W \le \|B\| \cdot \|v\|_V. \tag{25}$$

Tedy $\|B\|$ je nejmenší konstanta C v (24).

Poznámka 3.3 *Omezený lineární operátor $B : V \longrightarrow W$ je spojitý:*
$v_j \longrightarrow v$ ve $V \implies Bv_j \longrightarrow Bv$ ve W pro $j \longrightarrow \infty$, protože

$$\|Bv_j - Bv\|_W = \|B(v_j - v)\|_W \le \|B\| \cdot \|v_j - v\| \longrightarrow 0 \quad pro \quad j \longrightarrow \infty\,.$$

Lze ukázat i naopak: Je-li lineární operátor spojitý, je i omezený. □

$W = \mathbb{R} \implies$ lineární funkcionály
$L : V \longrightarrow R$ lineární funkcionál na V.
Množina všech omezených lineárních funkcionálů na V se nazývá duální prostor k V (označení V^*),

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v\in V} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} \qquad (L(v) \in \mathbb{R} \implies \|\ .\ \|_{\mathbb{R}} = |\ .\ |). \tag{26}$$

Definujeme-li ve V^*:

$$(\lambda L + \mu M)v = \lambda L(v) + \mu M(v)\,, \quad L,\ M \in V^*,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},$$

pak V^* je normovaný lineární prostor. Lze ukázat, že V^* je úplný, a tedy Banachův.

3.4 Bilineární formy

Věta 3.1 *Rieszova věta o reprezentaci lineárního funkcionálu*
V ... Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)$.
Pro každý omezený lineární funkcionál L na V existuje právě jedno $u \in V$ tak, že

$$L(v) = (v, u) \quad \forall v \in V\,. \tag{27}$$

Navíc $\|L\|_{V^*} = \|u\|_V$.

Důkaz Jednoznačnost:

$$\begin{aligned} u_1, u_2 \in V \ : \quad & L(v) = (v, u_1)\ \forall v \in V \quad \text{a} \quad L(v) = (v, u_2)\ \forall v \in V \\ \Longrightarrow\ & (v, u_1) = (v, u_2)\ \forall v \in V\,, \quad \text{tedy i pro} \quad v = u_1 - u_2 \\ \Longrightarrow\ & (u_1 - u_2, u_1) - (u_1 - u_2, u_2) = 0\,, \quad \text{a tedy} \\ & (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 = u_2\,. \end{aligned}$$

Existence:
a) $L(v) = 0\ \forall v \in V \quad \Longrightarrow \quad u = 0 \qquad\qquad (L(v) = (v, u) = 0\ \forall v \in V)$
b) Nechť nyní $L(\widetilde{v}) \neq 0$ pro nějaké $\widetilde{v} \in V$.
Zkonstruujeme u jako vhodný normalizovaný "normálový" vektor k podprostoru

$$V_0 = \{v \in V,\ L(v) = 0\}\ (= \mathrm{Ker} L)\,.$$

V_0 je uzavřený lineární podprostor V, podle věty o projekci (21) lze $\widetilde{v} \in V$ zapsat právě jedním způsobem jako

$$\widetilde{v} = v_0 + w\,, \quad v_0 \in V_0\,, \quad w \ \text{ ortogonální k } \ V_0$$

(tj. mimo jiné w neleží ve V_0), přičemž $L(w) = L(\widetilde{v} - v_0) = L(\widetilde{v}) \neq 0$. Pak pro $v \in V$ libovolné je

$$L\left(v - w\frac{L(v)}{L(w)}\right) = L(v) - L(w)\frac{L(v)}{L(w)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v - w\frac{L(v)}{L(w)} \in V_0\,,$$

a protože $w \perp V_0 \quad \Longrightarrow \quad \left(v - w\dfrac{L(v)}{L(w)}, w\right) = 0\,.$
Poslední rovnost rozepíšeme a upravíme:

$$(v, w) - \frac{L(v)}{L(w)}(w, w) = 0$$

$$(v, w) = \frac{L(v)}{L(w)}\|w\|^2 \quad \Longrightarrow \quad L(v) = \frac{L(w)}{\|w\|^2}(v, w) = \left(v, \frac{L(w)}{\|w\|^2}w\right)$$

Tedy dokonce jsme u zkonstruovali:

$$L(v) = (v, u) \quad \forall v \in V\,, \quad \text{kde} \quad u = w\frac{L(w)}{\|w\|^2}\,.$$

Navíc:

$$\frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \frac{|(v, u)|}{\|v\|_V} \leq \frac{\|v\|_V \cdot \|u\|_V}{\|v\|_V} = \|u\|_V \quad \Longrightarrow$$

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \|u\|_V \,.$$

□

Důsledek Rieszovy věty
Lineárním funkcionálům $L \in V^*$ lze přiřadit $u \in V$, a tedy je-li V Hilbertův prostor, je V^* "ekvivalentní" s V.

Příklad 3.8 *Z lineární algebry víme:*
$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\Longleftrightarrow$ L *je reprezentováno maticí* $A_{1\times 3}$, *tj.*

$$\exists! A_{1\times 3} \;:\; L(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \,.$$

Tedy lineárnímu funkcionálu $L \in (\mathbb{R}^3)^*$ *je jednoznačně přiřazen prvek* $A = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \in \mathbb{R}^3$. □

3.5 Formulace problému

Uvažujme následující problém:
V ... Hilbertův
L ... omezený lineární funkcionál na V,
$a(.,.)$ ... symetrická, koercivní (V-eliptická) bilineární forma na V

$$\text{(P)} \qquad ?u \in V \;:\; a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \tag{28}$$

Jak můžete vidět, problém (P) je problém (12). Nyní už ale víme, jaké předpoklady musí splňovat bilineární forma $a(.,.)$ a lineární funkcionál L na Hilbertově prostoru V, abychom mohli aplikovat Rieszovu větu. Podle Rieszovy věty totiž platí, že

$$\forall L \in V^* \; \exists! u \in V \,, \text{ které řeší (P)} \,.$$

Poznámka 3.4 *Protože* $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$, *musí být tato rovnost splněna i pro* $v = u$. *Dostáváme (levá nerovnost plyne z koercivity bilineární formy* $a(u,v)$ *- viz (18), pravá z omezenosti* L *- viz (25))*

$$\alpha \|u\|_V^2 \le a(u,u) = L(u) \le \|L\|_{V^*} \|u\|_V \qquad \textit{t.j. dostáváme} \tag{29}$$

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V^*} \qquad \ldots \quad \textit{tzv. energetický odhad.} \tag{30}$$

Je-li tedy $a(.,.)$ *symetrická, koercivní a omezená bilineární forma na* V, *pak můžeme na* V *definovat normu (indukovanou touto bilineární formou)* $\|.\|_a$ ... *tzv. energetickou normu předpisem*

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall v \in V \,. \tag{31}$$

Protože $a(.,.)$ *je omezená* ($|a(v,w)| \le M\|v\|\,\|w\| \;\forall v,w \in V$) *a z (29) platí*

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_V \le \|v\|_a \le \sqrt{M}\|v\|_V \quad \forall v \in V \,,$$

$\|.\|_V$ *a* $\|.\|_a$ *jsou ekvivalentní - viz (23).*
V *je tedy Hilbertův prostor vzhledem ke skalárnímu součinu* $a(.,.)$ *a normě* $\|.\|_a$.

Problém (P) lze přepsat jako problém minimalizace (energetického) funkcionálu:

Věta 3.2 *Nechť $a(\,.\,,.)$ je symetrická, pozitivně definitní bilineární forma, L omezený lineární funkcionál na Hilbertově prostoru V. Pak*

$$\text{(P)} \qquad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \qquad (\textit{variační formulace, Galerkin}) \tag{32}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{(P}'\text{)} \qquad F(u) \le F(v) \quad \forall v \in V\,, \quad \textit{kde} \qquad (\textit{Ritz}) \tag{33}$$

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \quad \ldots \quad \textit{energetický funkcionál} \tag{34}$$

Důkaz 1. Nechť u řeší (P), $v \in V$ libovolné.
Položme $w = v - u \in V$. Pak $v = u + w$ a

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - L(u+w) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)}_{F(u)} + \underbrace{a(u,w) - L(w)}_{=0(u \text{ řeší (P)})} + \frac{1}{2}a(w,w) = \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(w,w)\,. \end{aligned}$$

Protože $a(\,.\,,.)$ je pozitivně definitní, je poslední člen kladný pro každé nenulové w, tedy

$$F(u) \le F(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

2. Nechť u řeší (P'), $v \in V$ libovolné.
Položme $g(t) = F(u+tv) \ge F(u) = g(0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad g$ má minimum v bodě $t = 0$, ale

$$g(t) = \frac{1}{2}a(u+tv,u+tv) - L(u+tv) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + t(a(u,v) - L(v)) + \frac{1}{2}t^2 a(v,v)\,,$$

t.j. g je kvadratický polynom v t, 0 je jeho stacionárním bodem:
$0 = g'(0) = a(u,v) - L(v)$, a tedy

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

□ Je-li tedy $a(\,.\,,.)$ symetrická, pozitivně definitní bilineární forma, L omezený funkcionál na V (V Hilbertův), pak $u \in V$ řeší (P), právě když u minimalizuje energetický funkcionál F. Rovnost $a(u,v) = L(v)$ je tzv. variační rovnice pro F. Metody studující minimalizační problém pro F jsou tzv. variační metody.

Věta 3.3 *Lax-Milgramovo lemma (zobecnění Rieszovy věty na nesymetrické bilineární formy) Je-li bilineární forma $a(\,.\,,.)$ omezená a koercivní ($V-$eliptická) v Hilbertově prostoru V a L omezený lineární funkcionál na V, pak existuje právě jedno $u \in V$ tak, že u řeší (P). Navíc platí energetický odhad*

$$\|u\|_V \le C\|L\|_{V^*}, \;\; C > 0, \;\; \textit{konstanta.}$$

Poznámka 3.5 *Není-li $a(\,.\,,.)$ symetrická, nelze ukázat ekvivalenci (P) a (P').*

3.6 Prostory funkcí

3.6.1 Prostory $\mathcal{C}^k(M)$

$M \subset \mathbb{R}^d$ podmnožina, $\mathcal{C}(M)$ ... lineární prostor funkcí spojitých na M

Příklad 3.9 $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ ... *n.l.p. s normou např.*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\,, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\,, \quad \|f\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}|f(x)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)|\,.$$

□

Poznámka 3.6 *Konvergence:*
a) "silná" konvergence (konvergence v normě)
X ... *n.l.p.*, $\|.\|_X$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $u \in X$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = u \ (v\ X) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\|_X = 0 \tag{35}$$

(označení $u_n \longrightarrow u$ v X).
b) "slabá" konvergence
X ... *n.l.p.*, X^* *duální prostor k* X, $\{u_n\} \subset X$

$$\{u_n\}_{n=1}^\infty \rightharpoonup u \in X \ \textit{pro}\ n \longrightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall L \in X^* \ \lim_{n\longrightarrow\infty} L(u_n) = L(u) \tag{36}$$

u ... *slabá limita posloupnosti* $\{u_n\}$ *(označení* $u_n \rightharpoonup u$ *)*
($L \in X^*$ ... *spojitý lineární funkcionál na* X*).*
c) $\{u_n\}_{n=1}^\infty \longrightarrow u \quad \Longrightarrow \quad \{u_n\}_{n=1}^\infty \rightharpoonup u$:

$$|L(u_n) - L(u)| = |L(u_n - u)| \le \|L\|_{X^*}\|u_n - u\|_X \le M\|u_n - u\|_X$$

(M ... *konstanta omezenosti* L*, viz (24))*

□

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ... oblast (= souvislá, otevřená množina)
$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ ... lineární prostor funkcí $k-$krát spojitě diferencovatelných na $\overline{\Omega}$, t.j.:

$$v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \mathrm{D}^\alpha v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \quad \forall |\alpha| \le k$$

$$\mathrm{D}^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}} \quad \dots \text{ parciální derivace řádu } |\alpha| \tag{37}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ ... multiindex, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ ... délka multiindexu α

Příklad 3.10 $\alpha = (1, 2)$, $|\alpha| = 3$, $\mathrm{D}^\alpha v = \dfrac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2}$
Všechny další parciální derivace 3. řádu funkce 2 proměnných:

$$\alpha = (3,0) \qquad \alpha = (0,3) \qquad \alpha = (2,1)$$
$$\mathrm{D}^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} \qquad \mathrm{D}^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} \qquad \mathrm{D}^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

□

Lineární parciální diferenciální rovnici řádu k na Ω můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha u = f(x)\,, \qquad a_\alpha(x) \ \ldots \text{ funkce proměnné } x \text{ v } \Omega\,.$$

Norma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$:

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\le k} \|\mathrm{D}^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}\,, \tag{38}$$

seminorma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$:

$$|v|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|=k} \|\mathrm{D}^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}\,. \tag{39}$$

Definice 3.5 *Říkáme, že funkce v má kompaktní nosič v Ω, jestliže*

$$v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega_0\,, \quad \Omega_0 \text{ kompaktní (omezená, uzavřená) podmnožina } \Omega\,.$$

Označení: $\operatorname{supp} v = \{x \in \Omega,\ v(x) \neq 0\}\,, \quad \Omega_0 = \overline{\operatorname{supp} v}.$

Příklad 3.11

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, 0\rangle \\ x & x \in (0,1\rangle \\ -x+2 & x \in (1,2) \\ 0 & x \in \langle 2,3\rangle \end{cases}$$

$\Omega = \langle -1, 3\rangle\,, \quad \operatorname{supp} f = (0,2)\,, \quad \Omega_0 = \langle 0, 2\rangle\,.$ □

Definujeme:

$$\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})\,, \quad \overline{\operatorname{supp} v} \subset \Omega\}\,,$$

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ … množina funkcí, které mají spojité derivace všech řádů a jsou nulové vně nějaké omezené, uzavřené podmnožiny Ω. Často značíme

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \ \ldots \text{ tzv. prostor testovacích funkcí}$$

a omezené lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ nazýváme distribuce.

Poznámka 3.7 *Je-li $v \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$, pak $\mathrm{D}^\alpha v = 0$ na hranici Ω pro $|\alpha| \le k$.*

Poznámka 3.8 *Konvergence v $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:*
$\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\,,\ \varphi_n \longrightarrow \varphi\,,$ *jestliže*
1. existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ taková, že

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K \quad \forall n$$

2. $\mathrm{D}^\alpha\varphi_n \longrightarrow \mathrm{D}^\alpha\varphi$ stejnoměrně $\forall\alpha$:

$$\sup_{x\in\Omega} |\mathrm{D}^\alpha\varphi_n(x) - \mathrm{D}^\alpha\varphi(x)| \longrightarrow 0\,.$$

Definice 3.6 *Funkcionál F definovaný na $\mathcal{D}(\Omega)$ je distribuce, tj. $F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \iff$*

1. $F(\varphi+\psi) = F(\varphi) + F(\psi)\,,$
2. $F(\alpha\varphi) = \alpha F(\varphi)\,,$
3. *Jestliže $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, pak $F(\varphi_n) \longrightarrow F(\varphi)$.*

3.6.2 Prostory L^p

Měli bychom pracovat s tzv. měřitelnými funkcemi a s Lebesgueovým integrálem. To ale neumíme. Uveďme nejprve několik poznámek.

Pro $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je Lebesgueův integrál totožný s Riemannovým.
Řekneme, že $\Omega_0 \subset \Omega$ je množina míry 0, je-li její "objem" nulový:

$$|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}\Omega = 0\,.$$

Říkáme, že dvě funkce se sobě rovnají skoro všude (s.v.), jestliže se sobě rovnají všude, až na množinu míry 0.

Příklad 3.12 *Ω omezená oblast, $x_0 \in \Omega$, označme $I_\Omega(v) = \int_\Omega v(x)\mathrm{d}x$.*

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 \quad \forall x \in \Omega \\ v_2(x) &= \begin{cases} 1 & \forall x \in \Omega,\ x \neq x_0 \\ 2 & x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \quad I_\Omega(v_1) = I_\Omega(v_2) = |\Omega|$$

□

Poznámka 3.9 *Hranice $\Gamma = \partial\Omega$ omezené oblasti Ω je množina míry nula $\Longrightarrow$ $I_{\overline{\Omega}}(v) = I_\Omega(v) \quad \forall v$. Například:*

$$\Omega \subset \mathbb{R}^1\,,\ \textit{t.j. } \Omega = (a,b) \quad \Longrightarrow \quad I_\Omega(v) = \int_a^b v(x)\mathrm{d}x\,,\ I_{\overline{\Omega}}(v) = \int_a^b v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka 3.10 *Z toho, že funkce je integrovatelná neplyne nic o její hodnotě v bodě $x_0 \in \Omega$, tedy hodnoty funkce v jednotlivých bodech nejsou dobře definovány.*

Vraťme se zpět k Lebesgueovým prostorům:

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \int_\Omega |v|^p \mathrm{d}\Omega < \infty\}\,. \tag{40}$$

L^p je úplný normovaný lineární prostor, tj. Banachův, s normou

$$\|v\|_{L^p} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\,, \quad 1 \leq p < \infty\,, \tag{41}$$

Řekneme, že $v \in L^p$, jestliže $\|v\|_{L^p} < \infty$.
Poznamenejme ještě, že prostor $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je hustý v $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, t.j. zhruba řečeno: libovolnou funkci $v \in L^p$ můžeme aproximovat libovolně dobře v L^p normě funkcemi z $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

$$\forall v \in L^p\ \exists \{v_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})\ :\ \|v_i - v\|_{L^p} \longrightarrow 0 \text{ pro } i \longrightarrow \infty\,.$$

Nás bude zajímat zejména L^2, protože L^2 je Hilbertův prostor (jediný ze všech L^p prostorů) se skalárním součinem,

$$(v,w) = \int_\Omega v(x)w(x)\mathrm{d}x\,, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{42}$$

3.6.3 Sobolevovy prostory

Sobolevovy prostory jsou velmi speciální Hilbertovy prostory.
Nejprve musíme zobecnit pojem parciálních derivací.
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast (= souvislá, otevřená množina), $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Integrací per partes dostaneme

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)\,.$$

(Hraniční integrál vypadne, viz poznámka 3.7.)
Je-li ale $v \in L^2(\Omega)$, pak $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ nemusí v klasickém smyslu existovat. Proto definujeme zobecněnou derivaci v jako lineární funkcionál

$$L(\varphi) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi) = -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)\,. \tag{43}$$

Je-li L omezený v L^2, pak podle Rieszovy věty existuje právě jedna funkce $w \in L^2$ taková, že

$$L(\varphi) = (w, \varphi) \qquad \forall \varphi \in L^2\,, \qquad \text{t.j.}$$

$$-\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x = \int_\Omega w\varphi \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

(na pravé straně poslední rovnice je skalární součin v $L^2(\Omega)$).
Říkáme, že zobecněná derivace je z $L^2(\Omega)$, píšeme

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = w\,,$$

čímž rozumíme

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)\,. \tag{44}$$

Poznámka 3.11 $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ ... *zobecněná derivace se rovná klasické*

Příklad 3.13 $\Omega = (0,1),\ v(x) = x^2$

$$\int_0^1 w(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = L(\varphi) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi) = -\int_0^1 x^2\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1((0,1))\,,$$

$$L(\varphi) = -\int_0^1 x^2\varphi'(x)\mathrm{d}x = \begin{matrix}\text{per}\\ \text{partes}\end{matrix} = -\left[x^2\varphi(x)\right]_0^1 + \int_0^1 2x\varphi(x)\mathrm{d}x\,,$$

$$\exists\,!\ w \in L^2(\Omega)\ :\quad L(\varphi) = (w,\varphi)\quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad w(x) = 2x\,,$$

tedy zobecněná derivace je rovna klasické. □

Definice 3.7 *$D^\alpha v$ - zobecněná derivace (slabá, derivace ve smyslu distribucí):*

$$L(\varphi) = D^\alpha v(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v D^\alpha \varphi \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega)\,. \tag{45}$$

L omezený v L^2 $\Longrightarrow$ podle Rieszovy věty $\exists\,!\ w \in L_2$ (označme ho $D^\alpha v$) tak, že

$$(D^\alpha v, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(v, D^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega)\,. \tag{46}$$

Příklad 3.14 *$|x|$ je lokálně integrovatelná funkce, která je v klasickém smyslu diferencovatelná ve všech bodech kromě $x = 0$. Vypočtěme zobecněnou derivaci (derivaci ve smyslu distribucí).*

$$v(x) = |x|\,, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})\,, \qquad (\alpha = 1 \ldots \textit{počítáme 1. derivaci})$$

$$?\ w \in L^2(\mathbb{R}): \quad L(\varphi) = (w, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})\,,$$

$$L(\varphi) \overset{\text{def}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$\underset{\text{partes}}{\overset{\text{per}}{=}} [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (-1)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}x\, \varphi(x)\mathrm{d}x \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})(= \mathcal{D}) \implies w(x) = \mathrm{sgn}x \ \ldots \ \textit{zobecněná derivace } |x|\,.$$

□

Příklad 3.15 *Haevisideova funkce:* $H(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$?\ w\ : \qquad L(\varphi) = (w, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}\ .$$

$$L(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{-\infty}^{0} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \varphi(x) + \varphi(0)\,,$$

$$L(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

$$\implies \quad w(x) = H'(x) = \delta(x) \ldots \textit{zobecněná derivace}$$

□

Poznamenejme, že výhodou distribucí oproti obyčejnému kalkulu je, že každá distribuce má derivaci.

Definice 3.8 *Posloupnost distribucí $\{F_n\}$ se nazývá konvergentní k distribuci F, jestliže*

$$(F_n, \varphi) \longrightarrow (F, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}\,.$$

Věta 3.4 *nechť $F, F_1, F_2, \ldots$ jsou lokálně integrovatelné funkce takové, že $F_n \longrightarrow F$ stejnoměrně na každé omezené množině. Pak $D^\alpha F_n \longrightarrow D^\alpha F$ (ve smyslu distribucí).*

Důkaz

$$(D^\alpha F_n, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F_n, D^\alpha\varphi) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha\varphi) = (D^\alpha F, \varphi) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}\,.$$

Např. $\alpha = 1 \implies (F_n', \varphi) \longrightarrow (F', \varphi)$ kdykoliv $(F_n, \varphi) \longrightarrow (F, \varphi)$ stejnoměrně.

□

Příklad 3.16

$$\textit{Nechť } f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\textit{t.j. } f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,,\ f_2(x) = \frac{2}{\pi(1+4x^2)}\,,\ f_3(x) = \frac{3}{\pi(1+9x^2)}\,,\ \ldots$$

Ukážeme, že posloupnost $f_n(x)$ konverguje ve smyslu distribucí k Diracově $\delta-$funkci $\delta(x)$. Nechť φ je testovací funkce. Musíme ukázat, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \varphi(0) \quad \textit{pro } n \longrightarrow \infty\,,\ \textit{t.j. že}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0) \longrightarrow\ 0 \quad \textit{pro } n \longrightarrow \infty\,.$$

Vypočtěme nejprve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\,[\mathrm{arctg}t]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Povšimněte si, že plocha obrazce ohraničeného grafem funkce f_n a osou x je pro všechna n rovna 1.

Pro $\varphi \in \mathcal{D}$ je tedy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x\,,$$

kde $[-a, a]$ je interval, ve kterém leží $\mathrm{supp}\varphi$. *Tedy*

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0)\Big| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x\Big| \le$$

$$\le \Big|\varphi(0)\int_{-\infty}^{-a} f_n(x)\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_{-a}^{a} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x\Big| + \Big|\varphi(0)\int_{a}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\Big|\,.$$

a) $$\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big|\varphi(0)\int_{-\infty}^{-a} f_n(x)\mathrm{d}x\Big| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\Big|\varphi(0)\frac{1}{\pi}\,[\mathrm{arctg}(nx)]_{-\infty}^{-a}\Big| =$$

$$= \frac{|\varphi(0)|}{\pi}\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big|\Big[\mathrm{arctg}(-an) - \lim_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{arctg}(nx)\Big]\Big| = 0\,.$$

b) *Obdobně* $$\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big|\varphi(0)\int_{a}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\Big| = 0\,.$$

Dostali jsme

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0)\Big| \le \Big|\int_{-a}^{a} f_n(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\mathrm{d}x\Big|\,.$$

Aplikujeme-li větu o střední hodnotě

$$|\varphi(x) \le \max_x |\varphi'(x)|\,|x-0|\,,$$

dostaneme

$$\Big|\int_{-a}^{a} f_n(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\mathrm{d}x\Big| \le \int_{-a}^{a} |f_n(x)|\,|\varphi(x)-\varphi(0)|\mathrm{d}x \le \max_{x\in\langle -a,a\rangle} |\varphi'(x)|\cdot\int_{-a}^{a}|xf_n(x)|\mathrm{d}x\,.$$

Vypočteme poslední integrál:

$$xf_n(x) = \frac{nx}{\pi(1+n^2x^2)} \;\ldots\; \textit{lichá funkce}\,,\quad |xf_n(x)| \;\; \textit{je funkce sudá} \quad \Longrightarrow$$

$$\int_{-a}^{a}|xf_n(x)|\mathrm{d}x = 2\int_0^a |xf_n(x)|\mathrm{d}x = 2\int_0^a \frac{nx}{\pi(1+n^2x^2)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^{1+a^2n^2} \frac{\mathrm{d}t}{\pi\, n\, t} = \frac{1}{n\pi}\,[\ln\, t]_1^{1+a^2n^2} = \frac{1}{n\pi}\,\ln(1+a^2n^2)\,,\quad \textit{a dále}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-a}^{a}|xf_n(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\ln(1+a^2n^2)}{\pi n} \overset{L'H}{=} \frac{2a^2}{\pi}\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n}{1+a^2n^2} = 0\,.$$

$$\textit{Tedy}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \text{pro } n\longrightarrow\infty\,,$$

$$\textit{t.j.}\quad F_n(\varphi) \;\longrightarrow\; F(\varphi) \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}\,,\quad \textit{a tedy}\;\; f_n(x)\longrightarrow\delta(x)\;\; \textit{ve smyslu distribucí}.$$

Poznamenejme, že

$$f_n'(x) = \left(\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\right)' = -\frac{2n^3x}{\pi(1+n^2x^2)^2}\,,$$

$F_n'(x) \longrightarrow \delta'(x)$ *ve smyslu distribucí, ale v klasickém smyslu je*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{-2n^3x}{\pi(1+n^2x^2)^2} = 0\,.$$

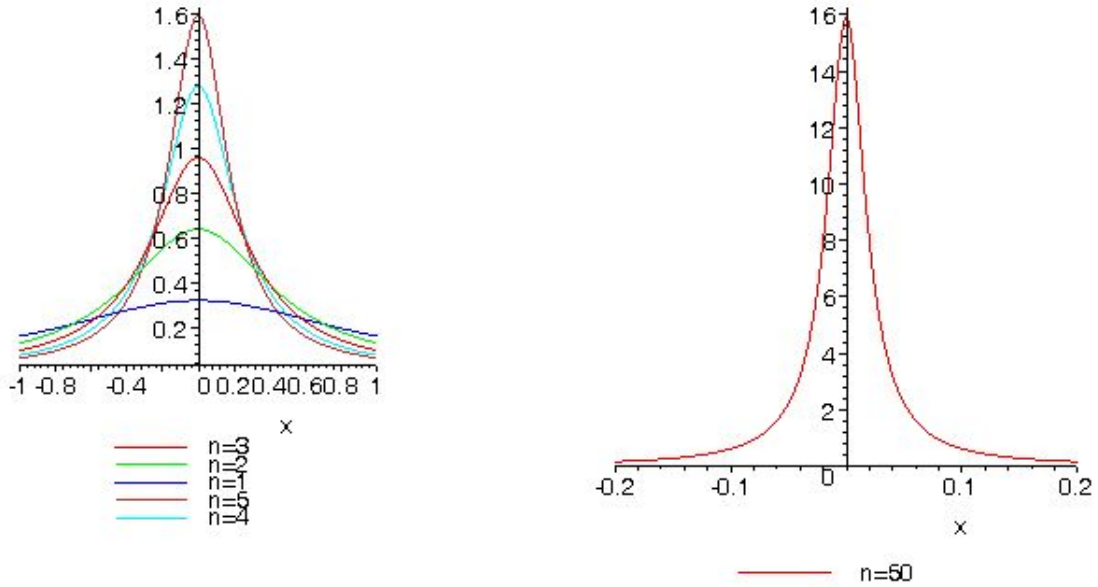
□

Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^d$. Definujme nyní prostory všech funkcí, jejichž zobecněné derivace řádu $\le k$ patří do L^2:

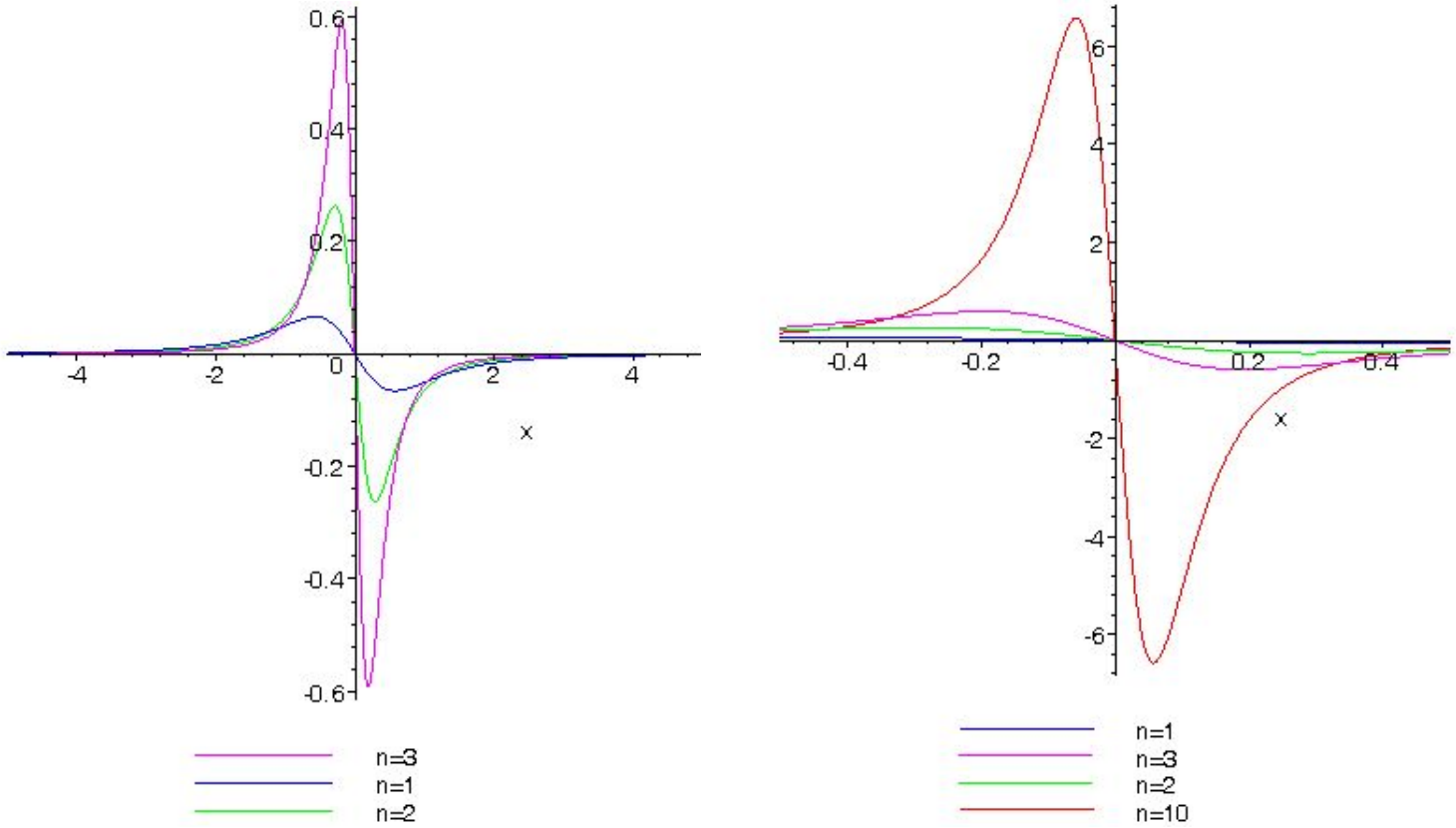
$$H^k = H^k(\Omega) = \{v\in L^2, D^\alpha v\in L^2 \text{ pro } |\alpha|\le k\}\,. \tag{47}$$

Tento prostor vybavíme skalárním součinem

$$(v,w)_k = (v,w)_{H^k} = \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega D^\alpha v\, D^\alpha w\,\mathrm{d}x \tag{48}$$



Obrázek 1: Posloupnost funkcí, které konvergují k Diracově $\delta-$funkci



Obrázek 2: Posloupnost derivací funkcí z obr. 1

a odpovídající normou

$$||v||_k = ||v||_{H^k} = (v,v)_k^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha v)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} . \tag{49}$$

Konkrétně

$$||v||_0 = ||v||_{L^2} \qquad \text{(nulu obvykle vynecháváme)}\,,$$

$$||v||_1 = \left(\int_\Omega \left\{ v^2 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \left(||v||^2 + ||\nabla v||^2 \right)^{1/2} ,$$

$$||v||_2 = \left(\int_\Omega \left\{ v^2 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j} \right)^2 \right\} \mathrm{d}x \right)^{1/2} .$$

H^k s normou $||\cdot||_k$ je úplný, a tedy Hilbertův ... tzv. Sobolevův prostor.

Někdy používáme také seminormu pro $k \ge 1$:

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega (D^\alpha v)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} .$$

Zobecnění: Definujeme prostor $W_p^k = W_p^k(\Omega)$ s normou

$$||v||_{W_p^k} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} \left| D^\alpha v \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} , \quad 1 \le p < \infty\,.$$

S touto normou je prostor úplný, tedy Banachův.

Pro $p = 2$ je $W_2^k = H^k$.

4 Variační formulace okrajových úloh

Řešme úlohu

$$\mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = f \quad \text{v } \Omega = (0,1)\,, \tag{50}$$

$$u(0) = u(1) = 0\,, \tag{51}$$

kde $a = a(x),\ b = b(x),\ c = c(x)$ jsou hladké funkce, $f = f(x)$ je vhodná daná funkce. Nechť

$$a(x) \ge a_0 > 0\,,\ c(x) - \frac{1}{2} b'(x) \ge 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} = \langle 0,1 \rangle\,.$$

Poznamenejme, že rovnice (51) jsou tzv. homogenní Dirichletovy okrajové podmínky.
Rovnici (50) vynásobíme testovací funkcí $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ a integruujeme přes Ω (aplikujeme per-partes). Dostaneme tzv. variační nebo také slabou formulaci úlohy (50):

$$\int_0^1 (au'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi)\mathrm{d}x = \int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)\,. \tag{52}$$

Označme

$$a(v,w) = \int_0^1 (av'w' + bv'w + cvw)\mathrm{d}x \quad \dots \quad \text{bilineární forma}\,,$$

$$L(w) = (f,w) = \int_0^1 fw\mathrm{d}x \quad \dots \quad \text{lineární funkcionál}\,.$$

Řekneme, že u je slabým řešením úlohy (50), je-li $u \in \mathrm{H}_0^1$ a platí

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,. \tag{53}$$

Poznámka 4.1 *Na rozdíl od klasického řešení, nemusí být slabé řešení dvakrát spojitě diferencovatelné. Je-li ale dvakrát spojitě diferencovatelné, je to i klasické řešení, protože*

$$\int_0^1 (\mathcal{A}u - f)\cdot\varphi\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\varphi \in H_0^1 \implies \mathcal{A}u = f \ \ v\ \Omega \ \ \textit{a také}\ u(0) = u(1) = 0\,,$$

protože $u \in H_0^1$.

Ukážeme, že díky uvedeným předpokladům:

$$a(x) \geq a_0 > 0\,,\ c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} = \langle 0,1\rangle\,,$$

je bilineární forma $a(\cdot,\cdot)$ koercivní (V-eliptická) na H_0^1:

$$a(v,v) \geq \alpha||v||_1^2 \quad \forall v \in H_0^1\,,\ \alpha > 0\,.$$

Vypočtěme nejprve $\displaystyle\int_0^1 b\,v'\,v\mathrm{d}x$. Aplikujeme-li per-partes:

$$\int_0^1 v'(x)\,b(x)\,v(x)\mathrm{d}x = \left[b(x)\,v^2(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (b'(x)\,v(x) + b(x)\,v'(x))\,v(x)\mathrm{d}x\,,$$

Protože $v \in H_0^1$, je "hraniční člen" nulový. Dostaneme rovnici:

$$2\cdot\int_0^1 v'(x)\,b(x)\,v(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 b'(x)\,v^2(x)\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1\,. \quad \text{Tedy}$$

$$\int_0^1 v'(x)\,b(x)\,v(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{2}b'(x)\,v^2(x)\mathrm{d}x \quad \implies$$

$$\int_0^1 (b\,v'\,v + c\,v^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (c(x) - \frac{1}{2}b'(x))\,v^2(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1\,,$$

kde jsme využili předpoklad $c(x) - \dfrac{1}{2}b'(x) \geq 0$.

Pro bilineární formu $a(v,w)$ dostáváme (nerovnost $(*)$ plyne z Poincarého nerovnosti)

$$a(v,v) = \int_0^1 (a(v')^2 + b\,v'\,v + c\,v^2)\mathrm{d}x \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} a(x)||v'||^2 \underset{(*)}{\geq} \frac{1}{2}a_0||v||_1^2 \quad \implies$$

$$a(v,v) \geq \frac{a_0}{2}||v||_1^2 \quad \forall v \in H_0^1\,.$$

Tedy bilineární forma $a(\cdot,\cdot)$ je koercivní na H_0^1.

Nyní ukážeme, že bilineární forma $a(\cdot,\cdot)$ je omezená. Připomeňme náš problém: Hledáme $u \in H_0^1$ tak, aby

$$a(u,\varphi) = L(\varphi)\ \forall \varphi \in H_0^1\,, \quad L(\varphi) = (f,\varphi)_{L_2} = \int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x\,.$$

Pro $\varphi = u$ máme:

$$\alpha ||u||_1^2 \le a(u,u) = L(u) = (f,u) \le ||f||\,||u|| \le ||f||\,||u||_1\,,$$

$$||u||_1 \le \frac{2}{a_0}\,||f||\,.$$

Pro bilineární formu $a(\cdot,\cdot)$ dostáváme:

$$|a(v,w)| \le \int_0^1 |a\,v'\,w' + b\,v'\,w + c\,v\,w|\mathrm{d}x \le c\int_0^1 (|v'\,w'| + |v'\,w| + |v\,w|)\mathrm{d}x\,,$$

kde $c = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}(a(x),b(x),c(x))$. Na každý sčítanec aplikujeme Cauchy-Schwarz-Buňakovského nerovnost:

$$\int_0^1 |v'\,w|\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 (v'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 (w'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} = ||v'||\cdot||w'||\,, \qquad \text{atd.}$$

$\Longrightarrow$ bilineární forma $a(v,w)$ je omezená na H_0^1:

$$|a(v,w)| \le c\cdot||v||_1\cdot||w||_1 \quad \forall v,w \in H_0^1\,.$$

Poznamenejme ještě, že bilineární forma $a(v,w)$ není symetrická, existenci a jednoznačnost slabého řešení pro úlohu (50), (51) dokazujeme na základě Lax-Milgramovy věty:

Věta 4.1 *(Existence a jednoznačnost slabého řešení úlohy (50))*
Nechť $a(x) \ge a_0 > 0\,,\ c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \ge 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ f \in L_2(\Omega)$. *Pak existuje právě jedno řešení* $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *rovnice*

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,.$$

Toto řešení splňuje $\|u\|_1 \le \frac{2}{a_0}\|f\|$.

V důkazech vlastností bilineární formy jsme použili následující lemma.

Lemma 4.1 *Nechť* $\Omega = (0,1)$. *Pak existuje konstanta* C *taková, že*

$$|v(x)| \le C\,||v||_1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}\,, \forall v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})\,.$$

Důkaz Nechť $x,y \in (0,1)$, $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Pak

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{t.j.}\ \ |v(x)| \le |v(y)| + \int_y^x |v'(t)|\mathrm{d}t\,.$$

Aplikujeme Cauchy - Schwarz- Buňakovského nerovnost a dostaneme

$$\int_0^1 |v'(t)|\mathrm{d}t \le \int_0^1 1^2\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 (v'(t))^2\mathrm{d}t = ||v'||^2 .$$

Nerovnost $|v(x)| \le |v(y)| + ||v'||^2$ umocníme:

$$(v(x))^2 \le (|v(y)| + ||v'||)^2 = (v(y))^2 + 2|v(y)|\,||v'|| + ||v'||^2 \le 2((v(y))^2 + ||v'||^2) ,$$

kde jsme použili trik

$$(A-B)^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; A^2 - 2AB + B^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2AB \le A^2 + B^2 \;\text{ pro }\; A := |v(y)|,\; B := ||v'|| .$$

Integrujeme přes y:

$$\int_0^1 (v(x))^2\mathrm{d}y \le 2\int_0^1 (v(y))^2\mathrm{d}y + 2\int_0^1 ||v'||^2\mathrm{d}y = 2||v||^2 + 2||v'||^2 = 2||v||_1^2 .$$

Protože $\int_0^1 (v(x))^2\mathrm{d}y = (v(x))^2$, dostáváme (Poincarého nerovnost v jedné dimenzi)

$$|v(x)| \le \sqrt{2}\; ||v||_1 .$$

□

Věta 4.2 *(Poincarého nerovnost)*
Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^d$. Pak existuje konstanta $C = C(\Omega)$ tak, že

$$||v|| \le C\,||\nabla v|| \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Z Poincarého nerovnosti plyne ekvivalence norem $|\cdot|_1$ a $||\cdot||_1$ na H_0^1 :

$$|v|_1^2 = ||\nabla v||^2 \le ||v||_1^2 = ||v||^2 + ||\nabla v||^2 \le (C^2+1)\,||\nabla v||^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) ,$$

kde jsme aplikovali Poincarého nerovnost: $||v|| \le C\,||\nabla\, v|| \;\Rightarrow\; ||v||^2 \le C^2\,||\nabla\, v||^2$. Dostáváme nerovnost

$$|v|_1^2 \le ||v||_1^2 \le (C^2+1)\,|v|_1^2 , \quad \text{t.j.}\;\; |v|_1 \le ||v||_1 \le \sqrt{C^2+1}\;|v|_1 .$$

Duální prostor $H_0^1(\Omega)]^*$ ... prostor všech omezených lineárních funkcinálů na H_0^1. Obvykle označujeme $(H_0^1)^* = H^{-1}$,

$$||L||_{(H_0^1)^*} \;=\; ||L||_{-1} = \sup_{v\in H_0^1} \frac{|L(v)|}{|v|_1} .$$

Zkoumejme nyní případ $b = 0$:

$$a(v,w) = \int_0^1 (a\,v'\,w' + c\,v\,w)\mathrm{d}x , \quad a(x) \ge a_0 > 0 ,\; c(x) \ge 0 \quad \forall x \in \langle 0,1\rangle .$$

$a(v,w)$ je symetrická, positivně definitní, koercivní a omezená v $H_0^1(\Omega)$, indukuje tedy na $H_0^1(\Omega)$ energetickou normu

$$||v||_a = (a(v,v))^{1/2} .$$

Věta 4.3 *Nechť* $a(x) \geq a_0 > 0\,,\ c(x) \geq 0\ \forall x \in \overline{\Omega} = \langle 0,1\rangle\,,\ b(x) \equiv 0\ \forall x \in \langle 0,1\rangle\,,$ $f \in L^2$ *a* $u \in H_0^1$ *je slabé řešení rovnice (50), t.j.*

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1\,.$$

Položme

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^1 (a(\varphi')^2 + c\varphi^2)\mathrm{d}x - \int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x\,.$$

Pak $F(u) \leq F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1$*, přičemž rovnost nastane pouze pro* $\varphi = u$*.*

Příklad 4.1 *Napište variační formulaci a dokažte existenci řešení rovnice*

$$-u'' \ = \ f \quad v \quad \Omega = (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Zde $A(x) = 1,\ b(x) = c(x) = 0\ \forall x \in (0,1),\ f \in\ L_2(0,1)\,,\ \varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1)\ \Rightarrow\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\,.$

$$-\int_0^1 u''(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \textit{per partes}$$

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \qquad \ldots \quad \textit{slabá formulace}\,.$$

$$a(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\mathrm{d}x\,, \qquad a(v,v) = \int_0^1 (v'(x))^2\mathrm{d}x = ||v'||^2 \geq \frac{1}{2}||v||_1^2 \quad \ldots$$

symetrická, koercivní (positivně definitní).
Podle věty o existenci a jednoznačnosti slabého řešení $\Longrightarrow$

$$\exists!\ u \in H_0^1(0,1)\ :\ a(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad \textit{Navíc} \quad ||u||_1 \leq 2\,||f||\,.$$

□

4.1 Příklady II

Napište variační formulaci a v jednorozměrných úlohách dokažte existenci slabého řešení diferenciální rovnice. Aproximujte řešení metodou konečných prvků.

1. $$-u'' + 4u = \cos x\,, \qquad x \in (0,\pi)$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

2. $$-((x+1)u')' + u = x\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

3. $$-u'' + 2u = \mathrm{e}^x\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 2$$

4. $$-u'' - u' = x - 1\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

5. $$-\triangle u = x\,, \qquad \text{na} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$u = 0 \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

6. $$-\triangle u + u = \mathrm{e}^x\,, \qquad \text{na} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 1 \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

7. $$-\triangle u = x^2\,, \qquad \text{na} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$u = x \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

8. $$-u'' - xu' = x^2\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

9. $$-u'' - u' + u = \sin x\,, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$u(-\frac{\pi}{2}) = u(\frac{\pi}{2}) = 0$$

10. $$-u'' - \mathrm{e}^x u' = 2\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

11. $$-u'' + 5u = x^2\,, \qquad x \in (-1,1)$$
$$u(0) = u(1) = 1$$

12. $$-(\mathrm{e}^x u')' + 2u = 1\,, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

13. $$-\triangle u = \mathrm{e}^x\,, \qquad \text{na} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = x \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

14. $$-\triangle u + 2u = x\,, \qquad \text{na} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$u = 2 \qquad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

□

Než přejdeme k dvoudimenzionálním úlohám, zopakujme si

Věta 4.4 *(Gauss-Ostrogradského, divergenční)*
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí* Γ, $u \in H^1(\Omega)$. *Pak*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x = \int_\Gamma u\, n_i \mathrm{d}S\,, \quad i = 1,2\,, \quad \overrightarrow{n} = (n_1, n_2)\,,$$

$\overrightarrow{n}$ *je jednotková vnější normála ke* Γ.

Položíme-li ve větě 4.4 $u := v \cdot w$, dostaneme

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} w + \frac{\partial w}{\partial x_i} v\right)\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\, w\, n_i \mathrm{d}S\,,\ i = 1,2 \quad \Longrightarrow$$

Greenova formule $$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v\, w\, n_i \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} v \mathrm{d}x\,, \quad v, w \in H^1(\Omega)\,.$$

Rozepsáno do složek $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v\, w\, n_1 \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_1} v \mathrm{d}x\,, \qquad w := \frac{\partial w}{\partial x_1}\,,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v\, w\, n_2 \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_2} v \mathrm{d}x\,, \qquad w := \frac{\partial w}{\partial x_2}\,,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v \mathrm{d}x\,,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v \mathrm{d}x\,.$$

Poslední dvě rovnice sečteme a dostaneme

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right) \mathrm{d}S - \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) v \mathrm{d}x\,,$$

$$\int_\Omega \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \operatorname{grad} w \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S - \int_\Omega \triangle w \cdot v \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$$

další Greenova formule

$$\int_\Omega \nabla v\, \nabla w \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot \frac{\partial w}{\partial \overrightarrow{n}} \mathrm{d}S - \int_\Omega \triangle w \cdot v \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$$

$$-\int_\Omega \triangle w \cdot v \mathrm{d}x = -\int_\Gamma v \cdot \frac{\partial w}{\partial \overrightarrow{n}} \mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla v\, \nabla w \,\mathrm{d}x\,. \tag{54}$$

Příklad 4.2 *Napište variační formulaci*

$$\begin{array}{rcll} -\triangle u & = & f & na \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \\ u & = & 0 & na \quad \Gamma = \partial\Omega\,. \end{array} \tag{55}$$

Rovnici vynásobíme testovací funkcí $v \in H_0^1(\Omega)$ a zintegrujeme:

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\triangle u) \cdot v \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\, v \mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla u\, \nabla v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Tedy

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v \,\mathrm{d}x \quad \ldots \textit{symetrická, omezená, koercivní bilineární forma}\,,$$

$$L(v) = \int_\Omega f\, v \mathrm{d}x \qquad \ldots \textit{spojitý lineární funkcionál}\,,$$

$$\Longrightarrow \qquad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \qquad u \ \ldots \ \textit{slabé řešení}\,.$$

□

Příklad 4.3 *Napište variační formulaci*

$$\begin{aligned} -\triangle u + u &= f \quad na \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi \quad na \quad \Gamma = \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Rovnici vynásobíme testovací funkcí $v \in H^1(\Omega)$ *a zintegrujeme:*

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\triangle u + u)\cdot v \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\triangle u\, v + u\, v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\, v \mathrm{d}S + \int_\Omega (\nabla u\, \nabla v + uv)\mathrm{d}x \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,.$$

Tedy

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u\, \nabla v\, + uv)\mathrm{d}x \quad \ldots \quad \textit{symetrická, omezená, koercivní bilineární forma}\,,$$

$$L(v) = \int_\Omega f\, v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \varphi\, v \mathrm{d}S \qquad \ldots \textit{spojitý lineární funkcionál}\,,$$

$$\Longrightarrow \qquad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,, \qquad u \ \ldots \ \textit{slabé řešení}\,.$$

□

Příklad 4.4 *Napište variační formulaci*

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad na \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \\ u &= g \quad na \quad \Gamma = \partial\Omega\,, \qquad g \in L^2(\Gamma)\,. \end{aligned} \tag{57}$$

Zde u *není nulová na* Γ*. Musíme předpokládat, že existuje funkce* $u_0 \in H^1(\Omega)$ *taková, že* $u_0\Big|_\Gamma = g$ *(*g *je stopa* u_0 *na hranici* Γ*).*

$$\gamma : H^1 \longrightarrow L^2(\Gamma) \quad \ldots \quad \textit{operátor stop}$$

g *je stopa funkce* $u_0 \in H^1$ *na* Γ*, t.j.* $g = \gamma u_0$*. Slabá formulace:*

$$?u \in H^1 \ : \quad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1, \qquad \gamma\, u = g\,.$$

Položme $w := u - u_0$*.*

$$a(v,w) = \int_\Omega \nabla v\, \nabla w\, \mathrm{d}x = L(v) - a(u_0, v)\,, \qquad \forall v \in H_0^1\,.$$

Lax-Milgramova věta $\Longrightarrow$ $\exists! w \in H_0^1$*, které řeší naší úlohu. Výsledné řešení je*

$$u = u_0 + w\,.$$

(splňuje původní rovnici a $\gamma u = g$ *na* Γ*).*
Řešení nezávisí na výběru rozšíření u_0 *hraničních hodnot* g *na celé* Ω*.* □

Příklad 4.5 *Napište variační formulaci následující rovnice vedení tepla*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u &= f \qquad v \quad \Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \\ u\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} &= 0 \qquad \ldots \quad \textit{okrajová podmínka} \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad x \in \quad \Omega \ldots \textit{počáteční podmínka} \end{aligned} \tag{58}$$

Slabá formulace:

$$?u \in H_0^1(\Omega) \;:\qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u\right) v \mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x\,, \quad v \in H_0^1\,.$$

Aplikujeme druhou Greenovu formuli a dostaneme

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}S = \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v\, \mathrm{d}x + a(u,v) = L(v)\,, \qquad \forall v \in H_0^1\,.$$

□

5 Diskrétní variační formulace okrajových úloh

Nechť V je Banachův, $a(u,v)$ symetrická bilineární forma na V,
$a(u,v)$ je omezená, tj. $\exists M > 0 :\ |a(u,v)| \le M \cdot ||u|| \cdot ||v||\ \forall u,\, v \in V$;
$a(u,v)$ je koercivní: $\exists m > 0 : a(u,u) \ge m \cdot ||u||^2\ \forall u \in V$;
L je spojitý lineární funkcionál na V: $\exists c > 0 :\ |L(v)| \le c \cdot ||v||\ \forall v \in V$.
$F(v) = \dfrac{1}{2} a(v,v) - L(v)\,.$

Spojitý problém:

$$\begin{array}{llllll} (\mathrm{P}) & ?\,u \in V & : & a(u,v) & = & L(v) \quad \forall v \in V \qquad\qquad (\text{Galerkin}) \\ (\mathrm{P}') & ?\,u \in V & : & F(u) & \le & F(v) \quad \forall v \in V \qquad\qquad (\text{Ritz}) \end{array}$$

Nechť nyní $V_h \subset V$ konečnědimenzionální, $\dim V_h = N_h\,,\ \{\varphi_1,\, \varphi_2 \ldots \varphi_{N_h}\}$ báze $V_h \implies$

$$v \in V_h \;:\; v = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i\, \varphi_i\,, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, \ldots, N_h \qquad \text{lineární kombinace prvků báze}$$

Diskrétní problém:
(splnění rovnice v diskrétní Galerkinově formulaci stačí požadovat jen pro prvky báze):

$$\begin{array}{llllll} (\mathrm{P}_h) & ?\,u_h \in V_h & : & a(u_h,\varphi_j) & = & L(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, N_h \qquad (\text{diskrétní Galerkin}) \\ (\mathrm{P}'_h) & ?\,u_h \in V_h & : & F(u_h) & \le & F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \qquad (\text{diskrétní Ritz}) \end{array}$$

Hledejme řešení problému (P_h) ve tvaru $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i$, (t.j. hledáme $\alpha_i\,,\ i = 1, \ldots, N_h$):

$$\begin{aligned} a(\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \varphi_j) &= L(\varphi_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, N_h\,, \quad \text{t.j.} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) &= L(\varphi_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, N_h\,. \end{aligned}$$

Maticově

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_{N_h}) & a(\varphi_2,\varphi_{N_h}) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \tag{59}$$

kde

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N_h}, \quad a_{i,j} = a(\varphi_j,\varphi_i)\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} = (L(\varphi_j))_{j=1}^{N_h}, \quad \overrightarrow{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{N_h}\,.$$

$\mathbf{A}$ ... matice tuhosti.
Za našich předpokladů je matice $\mathbf{A}$ symetrická a positivně definitní (plyne z V-elipticity).

Řešení problému (P'_h)

$$a(v,v) = a(\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j\varphi_j) \;=\; \sum_{i=1}^{N_h}\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_i\alpha_j a(\varphi_i,\varphi_j) = \overrightarrow{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\overrightarrow{\alpha}\,,$$

$$L(v) = \; L\left(\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j L(\varphi_j) = \overrightarrow{\alpha}^{\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \qquad \Longrightarrow$$

$$F(v) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\alpha}^{\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,. \tag{60}$$

Věta 5.1 *Za uvedených předpokladů existuje právě jedno řešení problému (P_h), a tedy i problému (P'_h).*

Věta 5.2 *(Odhad chyby - Céa)*
V ... Hilbertův, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ omezená bilineární forma, t.j. $|a(u,v)| \le M\,||u||\,||v||$, $a(\cdot,\cdot)$ koercivní (V-eliptická), t.j. $a(u,u) \ge m\,||u||^2$, L ... spojitý lineární funkcionál na V, t.j. $|L(v)| \le \alpha\,||v||$, $\forall v \in V$. Nechť u je řešení (P), u_h řeší (P_h). Pak

$$||u-u_h||_V \le \frac{M}{m}\,||u-v_h||_V \;\forall v_h \in V_h\,.$$

Konstanta $\dfrac{M}{m}$ nezávisí na V_h.

Důkaz

$$a(u,v) - a(u_h,v_h) = F(v) - F(v_h) \quad \forall v \in V\,,$$

$$v := v_h \;\Rightarrow\; a(u,v_h) - a(u_h,v_h) = a(u-u_h, v_h - v_h) = 0$$

$$\Longrightarrow\; a(u-u_h,v_h) = 0 \;\forall v_h \in V_h, \quad (\text{tedy i pro } v_h - u_h \in V_h) \Longrightarrow$$

$$a(u-u_h, v_h-u_h) = 0\,. \tag{61}$$

Bilineární forma $a(\cdot,\cdot)$ je V–eliptická $\Longrightarrow$ $a(u-u_h,u-u_h) \ge m\,||u-u_h||^2$ $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{m}\,a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \ge ||u-u_h||^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{m}\left(a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\right)\geq ||u-u_h||^2\,.$$

Aplikujeme-li (61), dostaneme $\frac{1}{m}a(u-u_h,u-v_h)\geq ||u-u_h||^2$, a z omezenosti $a(\cdot,\cdot)$ plyne

$$\frac{M}{m}||u-u_h||\,||u-v_h||\geq ||u-u_h||^2\,,\ \text{t.j.}$$

$$||u-u_h||\leq \text{konst}\cdot||u-v_h|| \quad \forall v_h\in V_h\,, \quad \text{konst}=\frac{M}{m}\,.$$

□

Poznámka 5.1 *Je-li bilineární forma symetrická, lze ukázat, že v tom případě je* konst $=\sqrt{\frac{M}{m}}$, *a tedy dostáváme "lepší" odhad chyby.*

Uveďme bez důkazu ještě jeden odhad chyby:

Věta 5.3 *Nechť u je slabé řešení, u_h jeho aproximace metodou konečných prvků. Pak*

$$||u_h-u||_a\leq c\cdot h^2||u||_2\,.$$

6 Metoda konečných prvků pro okrajové úlohy

Nechť nyní $\Omega=(0,1)$, $b\equiv 0$ na $\overline{\Omega}$. Označme

$$\mathcal{A}u:=-(au')'+c\,u=f \text{ v } (0,1)\,, \tag{62}$$

$$u(0)=u(1)=0\,, \tag{63}$$

kde $a=a(x)$, $c=c(x)$ jsou hladké funkce, $a(x)\geq a_0>0$, $c(x)\geq 0\in\overline{\Omega}$, $f\in L^2(\Omega)$.
Variační formulace:

$$?\ u\in H_0^1(\Omega)\ :\ a(u,\varphi)=(f,\varphi)\quad \forall\varphi\in H_0^1\,, \tag{64}$$

kde

$$a(u,\varphi)=\int_\Omega(a\,v'\,w'+\,c\,v\,w)\mathrm{d}x\,,\quad (f,\varphi)=\int_\Omega f\,\varphi\mathrm{d}x\,.$$

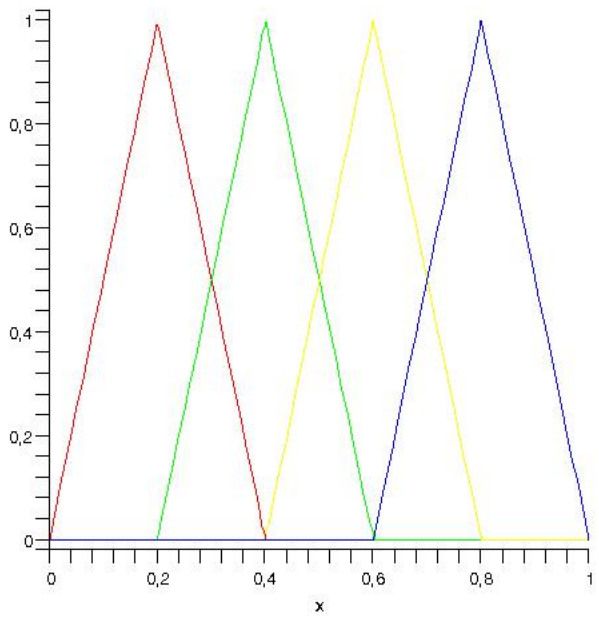
Víme, že existuje právě jedno řešení $u\in H_0^1(\Omega)$ ... slabé řešení (62), (63). Rozdělme interval $\overline{\Omega}=\langle 0,1\rangle\ :\ 0=x_0<x_1<\ldots,x_M=1$ a položme

$$h_j=x_j-x_{j-1}\,,\ h=\max_j h_j\,,\ K_j=\langle x_{j-1},x_j\rangle\,.$$

Řešení hledáme v konečnědimenzionálním prostoru funkcí S_h,

$$S_h=\{v\in\mathcal{C}=\mathcal{C}(\overline{\Omega}),\ v\ \text{ je lineární na každém }\ K_j,\ v(0)=v(1)=0\}\,,$$

$v(x)=\alpha\,x+\beta$ ... správně tzv. afinní funkce pro $\beta\neq 0$.
Zřejmě $S_h\subset H_0^1(\Omega)$.



Obrázek 3: Bázové funkce prostoru S_h

Báze S_h : množina $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M-1} \subset S_h$ "stanových funkcí":

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} .$$

Libovolnou funkci $v \in S_h$ lze napsat jako lineární kombinaci funkcí Φ_i:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M-1} v_i \, \Phi_i(x) \,, \quad v_i = v(x_i).$$

Příklad 6.1

$$-u'' + u = 2x \,, \quad \text{pro } x \in (0,1) \,, \qquad u(0) = u(1) = 0 \,. \tag{65}$$

Najděte slabé řešení pomocí metody konečných prvků založené na po částech lineárních bázových funkcích pro rovnoměrné dělení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ *s krokem* $h = 0,2$ $(0,1\,;\,0,05)$. *Najděte přesné řešení a vypočtěte maximální chybu výpočtu v bodech dělení.*

Přesné řešení (vypočtěte si):

$$u_{pr}(x) = -\frac{2}{e^2-1}\, e^{x+1} + \frac{2}{e^2-1}\, e^{-x+1} + 2x \,.$$

Metoda konečných prvků:

$$h_j = h = 0,2 \quad \forall j = 1, \ldots, 5 \quad (M = 5) \,,$$

$$K_1 = \langle 0\,;0,2 \rangle \,,\ K_2 = \langle 0,2\,;0,4 \rangle \,,\ K_3 = \langle 0,4\,;0,6 \rangle \,,\ K_4 = \langle 0,6\,;0,8 \rangle \,,\ K_5 = \langle 0,8\,;1 \rangle \,.$$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0,2$, $x_2 = 0,4$, $x_3 = 0,6$, $x_4 = 0,8$, $x_5 = 1$, *obecně* $x_k = k \cdot 0,2 \,, k = 0, \ldots, 5.$

Vypočteme bázové ("stanové") funkce $\Phi_1\,,\ \Phi_2\,,\ldots,\Phi_4$ *(viz obr. 3):*

$$\Phi_1(x) = \alpha_1\,x + \beta_1\,,\ x \in \langle 0\,;0,2\rangle\,,\ \Phi_1(0) = 0\,,\ \Phi_1(0,2) = 1\ \Rightarrow\ \alpha_1 = 5,\ \beta_1 = 0$$

$$\Phi_1(x) = \alpha_2\,x + \beta_2\,,\ x \in \langle 0,2\,;0,4\rangle\,,\ \Phi_1(0,2) = 1\,,\ \Phi_1(0,4) = 0\ \Rightarrow\ \alpha_2 = -5,\ \beta_2 = 2$$

Tedy

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 5x & x \in \langle 0\,;0,2\rangle \\ -5x+2 & x \in \langle 0,2\,;0,4\rangle \\ 0 & x \in \langle 0,2\,;1\rangle \end{cases}$$

Obdobně vypočteme

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0\,;0,2\rangle \\ 5x-1 & x \in \langle 0,2\,;0,4\rangle \\ -5x+3 & x \in \langle 0,4\,;0,6\rangle \\ 0 & x \in \langle 0,6\,;1\rangle \end{cases} \qquad \Phi_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0\,;0,4\rangle \\ 5x-2 & x \in \langle 0,4\,;0,6\rangle \\ -5x+4 & x \in \langle 0,6\,;0,8\rangle \\ 0 & x \in \langle 0,8\,;1\rangle \end{cases}$$

$$\Phi_4(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0\,;0,6\rangle \\ 5x-3 & x \in \langle 0,6\,;0,8\rangle \\ -5x+5 & x \in \langle 0,8\,;1\rangle \end{cases}$$

Variační formulace:

$$\int_0^1 (-u''+u)\varphi \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\varphi \mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in C_0^1(\Omega) \qquad (\varphi(0) = \varphi(1) = 0)$$

$$\int_0^1 -u''\varphi \mathrm{d}x = [-u'\varphi]_0^1 + \int_0^1 u'\,\varphi' \mathrm{d}x = \int_0^1 u'\,\varphi' \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$$

$$a(u,\varphi) = \int_0^1 (u'\varphi' + u\,\varphi)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\varphi \mathrm{d}x = L(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Maticově, viz (59), dostáváme

$$\mathbf{A}\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,,$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^4 = (a(\varphi_j,\varphi_i))_{i,j=1}^4\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} = (L(\varphi_j))_{j=1}^4\,, \quad \overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_4)^{\mathrm{T}}\,.$$

$$a_{11} = a(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 ((\varphi_1')^2+\varphi_1^2)\mathrm{d}x = \int_0^{0.2} (25+25x^2)\mathrm{d}x + \int_{0.2}^{0.4} (25+(-5x+2)^2)\mathrm{d}x = 10.13333333\,,$$

$$a_{12} = a_{21} = a(\varphi_2,\varphi_1) = \int_0^1 (\varphi_1'\,\varphi_2'+\varphi_1\,\varphi_2)\mathrm{d}x = \int_{0.2}^{0.4} (-25+(-5x+2)(5x-1))\mathrm{d}x = -4.966666667\,,$$

$$a_{13} = a_{31} = a(\varphi_3,\varphi_1) = 0\,, \qquad a_{14} = a_{41} = a(\varphi_4,\varphi_1) = 0\,, \qquad a_{24} = a_{42} = a(\varphi_4,\varphi_2) = 0\,,$$

$$a_{22} = a(\varphi_2,\varphi_2) = \int_0^1 ((\varphi_2')^2+\varphi_2^2)\mathrm{d}x = \int_{0.2}^{0.4} (25+(5x-1)^2)\mathrm{d}x + \int_{0.4}^{0.6} (25+(-5x+3)^2)\mathrm{d}x = 10.13333333\,,$$

$$a_{23} = a_{32} = a(\varphi_3,\varphi_2) = \int_0^1 (\varphi_3'\,\varphi_2'+\varphi_3\,\varphi_2)\mathrm{d}x = \int_{0.4}^{0.6} (-25+(-5x+3)(5x-2))\mathrm{d}x = -4.966666667\,,$$

$$a_{33} = a(\varphi_3,\varphi_3) = \int_0^1 ((\varphi_3')^2+\varphi_3^2)\mathrm{d}x = \int_{0.4}^{0.6} (25+(5x-2)^2)\mathrm{d}x + \int_{0.6}^{0.8} (25+(-5x+4)^2)\mathrm{d}x = 10.13333333\,,$$

$$a_{34} = a_{43} = a(\varphi_3, \varphi_4) = \int_0^1 (\varphi_3' \, \varphi_4' + \varphi_3 \, \varphi_4) \mathrm{d}x = -4.966666667 \,,$$

$$a_{44} = a(\varphi_4, \varphi_4) = \int_0^1 ((\varphi_4')^2 + \varphi_4^2) \mathrm{d}x = 10.13333333 \,.$$

Tedy matice tuhosti $\mathbf{A}$ *je třídiagonální, symetrická, positivně definitní matice:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10.13333333 & -4.966666667 & 0 & 0 \\ -4.966666667 & 10.13333333 & -4.966666667 & 0 \\ 0 & -4.966666667 & 10.13333333 & -4.966666667 \\ 0 & 0 & -4.966666667 & 10.13333333 \end{pmatrix} .$$

$$b_1 = L(\varphi_1) = 2 \int_0^1 x \, \varphi_1 \mathrm{d}x = 2 \int_0^{0.2} 5x^2 \mathrm{d}x + 2 \int_{0.2}^{0.4} x(-5x+2) \mathrm{d}x = 0,08 \,,$$

$$b_2 = L(\varphi_2) = 2 \int_0^1 x \, \varphi_2 \mathrm{d}x = 2 \int_{0.2}^{0.4} x(5x-1) \mathrm{d}x + 2 \int_{0.4}^{0.6} x(-5x+3) \mathrm{d}x = 0,16 \,,$$

$$b_3 = L(\varphi_3) = 2 \int_0^1 x \, \varphi_3 \mathrm{d}x = 2 \int_{0.4}^{0.6} x(5x-2) \mathrm{d}x + 2 \int_{0.6}^{0.8} x(-5x+4) \mathrm{d}x = 0,24 \,,$$

$$b_4 = L(\varphi_4) = 2 \int_0^1 x \, \varphi_4 \mathrm{d}x = 2 \int_{0.6}^{0.8} x(5x-3) \mathrm{d}x + 2 \int_{0.8}^{1} x(-5x+5) \mathrm{d}x = 0,32 \,.$$

Tedy $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (0,08;\, 0,16;\, 0,24;\, 0,32)^{\mathrm{T}}$.
Řešním soustavy (59) – existuje právě jedno – dostaneme neznámé koeficienty

$$\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)^{\mathrm{T}} = (0.05753111842, 0.1012715436, 0.1168752524, 0.08886319940)^{\mathrm{T}}$$

a řešení $u(x)$*:*

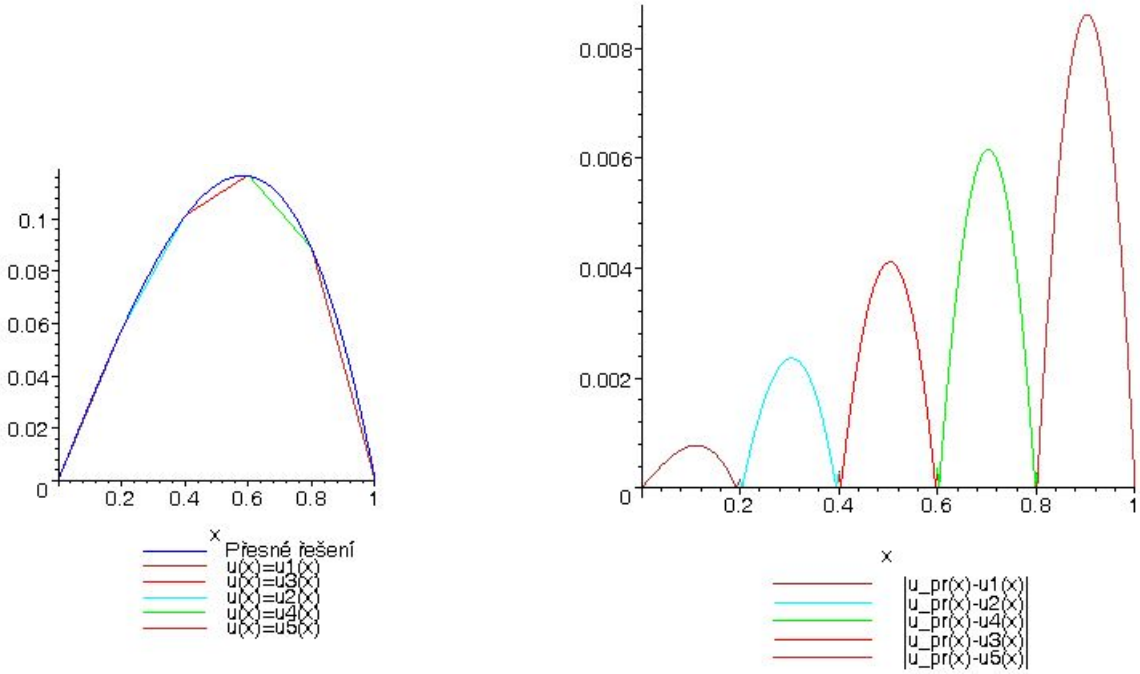
$$u(x) = \begin{cases} \alpha_1 \, 5x & = & 0.2876555921 \, x & x \in \langle 0; 0,2 \rangle \\ \alpha_1 \, (-5x+2) + \alpha_2 (5x-1) & = & 0.2187021259 \, x + 0.0137906932 & x \in \langle 0.2; 0.4 \rangle \\ \alpha_2 \, (-5x+3) + \alpha_3 (5x-2) & = & 0.0780185440 \, x + 0.0700641260 & x \in \langle 0.4; 0,6 \rangle \\ \alpha_3 \, (-5x+4) + \alpha_4 (5x-3) & = & -0.140060265 \, x + 0.2009114114 & x \in \langle 0.6; 0,8 \rangle \\ \alpha_4 \, (-5x+5) & = & -0.444315997 \, x + 0.4443159970 & x \in \langle 0.8; 1 \rangle \end{cases}$$

Povšimněte si, že například v bodě $x = 0,4$ *je* $u(0,4) = 0.1012715436 = \alpha_2$ *atd., tedy* $\alpha_i = u(x_i)$*. Počítáme-li maximální chybu výpočtu v uzlových bodech dělení, počítáme rozdíl* $|u_{pr}(x_i) - \alpha_i|$ *.*
□

Konečným prvkem (přesná definice viz. definice 8.1) obvykle rozumíme trojici $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$, kde
K je nějaká uzavřená souvislá množina v $\mathcal{R}^d$,
$\mathcal{P}$ je konečnědimenzionální podprostor hladkých funkcí
(např. polynomů) na množině K ,
Σ jsou "stupně volnosti" prostoru $\mathcal{P}$.

V našem příkladě: $K = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathcal{P} \equiv S_h \ldots$ po částech lineární spojité funkce, tzv. lineární konečné prvky , $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

Poznámka 6.1 *Diferenciální rovnice, které lze slabě formulovat, mají sudý řád* $2m$ *a slabé řešení hledáme v prostoru* H^m *(v našem případě je rovnice 2. řádu, slabé řešení hledáme v* H^1*).*



Obrázek 4: Slabé řešení rovnice (65) a jeho chyba (M=5)

7 Modelový problém v rovině

Nechť Ω je mnohoúhelník. Řešme Dirichletovu úlohu:

$$-\triangle u = f \qquad \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{66}$$

$$u = 0 \qquad \text{na} \Gamma = \partial\Omega\,. \tag{67}$$

Poznamenejme, že je-li $f = 0$, je rovnice (66) Laplaceova rovnice a jejím řešením jsou harmonické funkce. Je-li f nenulové, nazývá se rovnice (66) Poissonovou rovnicí.
Variační formulace:

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad u \ldots \text{slabé řešení}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \,\mathrm{d}x\,,$$

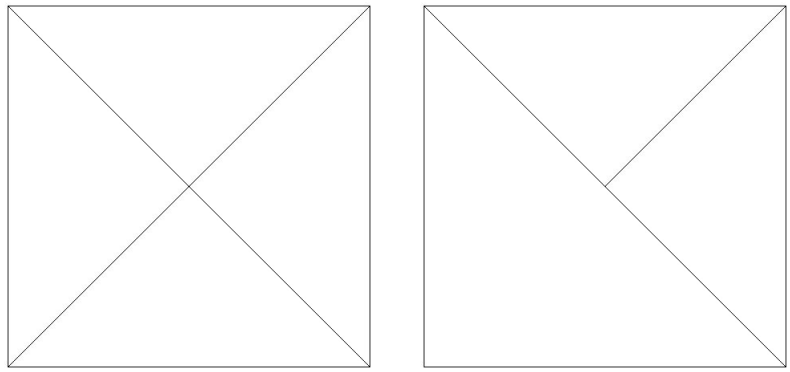
$$L(v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x\,.$$

Postupujeme obdobně jako pro $\Omega = \langle 0, 1\rangle$.
Rozdělíme mnohoúhelník Ω např. na trojúhelníky nebo čtyřúhelníky, tj. nechť $\mathcal{T}_h = \{K\}$ je množina uzavřených trojúhelníků ... triangulace Ω taková, že

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K\,, \quad h_k = \operatorname{diam}(K)\,, \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K\,.$$

Vrcholy trjúhelníků $K \in \mathcal{T}_h \ldots$ uzly triangulace $\mathcal{T}_h$.

Předpoklad: Průnik libovolných dvou trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$ je buď prázdný, nebo uzel, nebo hrana a žádný uzel neleží uvnitř nějaké hrany $\mathcal{T}_h$.



Obrázek 5: Vlevo přípustná triangulace, vpravo nepřípustná

$\mathcal{T}_h$ ... triangulace, k $\mathcal{T}_h$ přiřadíme prostor funkcí S_h, který obsahuje spojité, počástech lineární funkce na $\mathcal{T}_h$, které jsou nulové na Γ:

$$S_h = \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \ v \text{ je lineární v } \ K \ \forall K \in \mathcal{T}_h \,, \ v = 0 \text{ na } \Gamma \ \} \subset H_0^1(\Omega) \,.$$

Nechť $\{P_i\}_{i=1}^{M_h}$ je množina vnitřních uzlů Ω, t.j. takových uzlů, které neleží na Γ. Funkce z S_h jsou jednoznačně určeny svými hodnotami v P_j, báze S_h ... stanové (pyramidové) funkce:

$$\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h \ : \quad \Phi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$v \in S_h \,, \ v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_h} v_i \, \Phi_i(\mathbf{x}) \,, \ \text{kde } v_i = v(P_i) \ \ldots \ \text{hodnoty funkce } \ v \text{ v uzlech} \,.$$

S_h je konečnědimenzionální podprostor $H_0^1(\Omega)$.

Příklad 7.1 *Řešte Dirichletovu úlohu*

$$-\triangle u = f \quad v\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \,, \quad \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{68}$$

$$u = 0 \quad na\ \Gamma \,, \tag{69}$$

$$f(x,y) = \sin(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y) + \sin(\pi\, x)\, \sin(2\pi y) \,, \quad (x,y) \in \Omega \,,$$

metodou konečných prvků založené na po částech lineárních funkcích, Ω rozdělte na trojúhelníky, které získáte tak, že každý element čtvercové sítě s krokem $h = 0.2$ $(0.1, 0.05)$ rozdělíte uhlopříčkou přidáním diagonály s kladnou směrnicí. Ověřte, že triangulace splňuje naše požadavky. Vypočtěte L^2-normu chyby.
Přesné řešení:

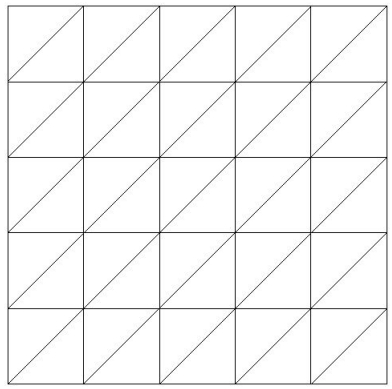
$$u(x,y) = (2\pi^2)^{-1} \sin(\pi x)\, \sin(\pi y) + (5\pi^2)^{-1} \sin(\pi x)\, \sin(2\pi y) \,.$$

□

```
> N1t1:=(x,y)->5*y;
```

$$N1t1 := (x,\, y) \rightarrow 5\, y$$

```
> N1t2:=(x,y)->-5*x+5*y+1;
```



Obrázek 6: Triangulace v rovině

$$N1t2 := (x,\, y) \to -5\,x + 5\,y + 1$$

```
> N1t3:=(x,y)->-5*x+2;
```

$$N1t3 := (x,\, y) \to -5\,x + 2$$

```
> N1t4:=(x,y)->-5*y+2;
```

$$N1t4 := (x,\, y) \to -5\,y + 2$$

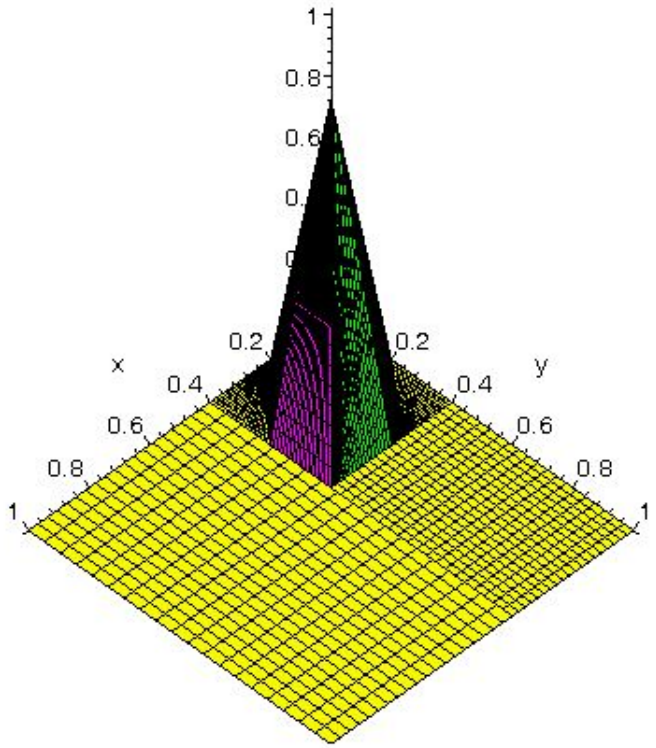
```
> N1t5:=(x,y)->5*x-5*y+1;
```

$$N1t5 := (x,\, y) \to 5\,x - 5\,y + 1$$

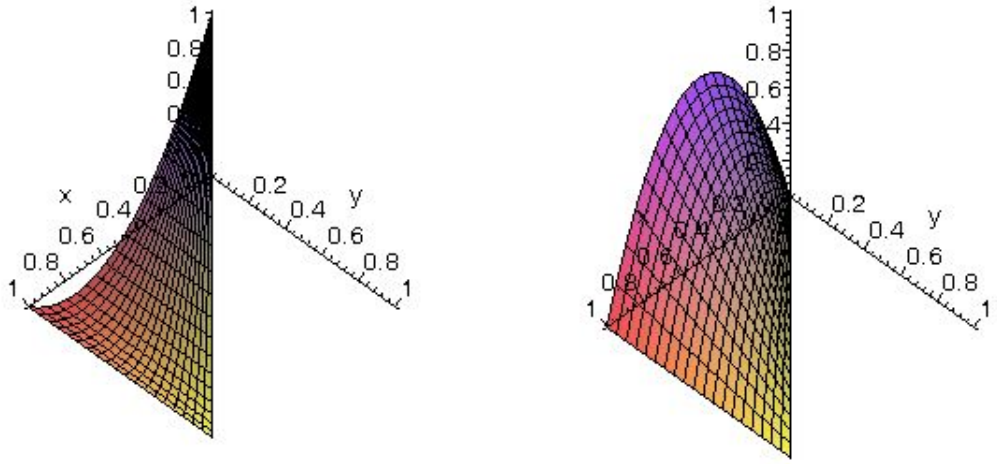
```
> N1t6:=(x,y)-> 5*x;
```

$$N1t6 := (x,\, y) \to 5\,x$$

```
> P1:=plot3d(N1t1(x,y),x=0..0.2,
> y=0..x,grid=[20,20],axes=normal,color=red):
> P2:=plot3d(N1t2(x,y),x=0.2..0.4,
> y=x-0.2..0.2,grid=[20,20],axes=normal,color=cyan):
> P3:=plot3d(N1t3(x,y),x=0.2..0.4,
> y=0.2..x,grid=[20,20],axes=normal,color=magenta):
> P4:=plot3d(N1t4(x,y),x=0.2..0.4,
> y=x..0.4,grid=[20,20],axes=normal,color=green):
> P5:=plot3d(N1t5(x,y),x=0..0.2,
> y=0.2..x+0.2,grid=[20,20],axes=normal,color=orange):
> P6:=plot3d(N1t6(x,y),x=0..0.2,
> y=x..0.2,grid=[20,20],axes=normal,color=blue):
> f:=(x,y)->0:
> P7:=plot3d(f(x,y),x=0..0.2,
> y=x+0.2..0.4,grid=[20,20],axes=normal,color=yellow):
> P8:=plot3d(f(x,y),x=0.2..0.4,
> y=0..x-0.2,grid=[20,20],axes=normal,color=yellow):
> P9:=plot3d(f(x,y),x=0..0.4,
> y=0.4..1,grid=[20,20],axes=normal,color=yellow):
> P10:=plot3d(f(x,y),x=0.4..1,
> y=0..1,grid=[20,20],axes=normal,color=yellow):
```



Obrázek 7: Bázová fce Φ_1



Obrázek 8: Kvadratické elementy

8 Konstrukce prostoru konečných prvků

Variační úloha:

$$? \; u \in H \qquad (H \ldots \quad \text{Hilbertův})$$

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V \qquad (\text{např. } V = H_0^1) \tag{70}$$

kde $a(u,v)$ je nějaká bilineární forma a F je lineární spojitý funkcionál na V.
Konstruujeme prostor $S \subset V$, $\dim S < \infty$. Co musíme vědět?

1. Jak vypadají funkce z S na dané podmnožině?
2. Jak tyto funkce najdeme?
3. Jak se restrikce funkcí na dvou sousedních "elementech" chovají na společné hranici?

Definice 8.1 **Konečný prvek** *(Ciarlet 1978)* *Nechť*

(i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *je omezená, uzavřená množina s neprázdným vnitřkem a s po částech hladkou hranicí (element domain)*

(ii) $\mathcal{P}$ *je konečnědimenzionální prostor funkcí na* K *(prostor tvarových funkcí – shape functions)*

(iii) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$ *je báze* $\mathcal{P}'$ *(omezené (spojité) lineární funkcionály nad* $\mathcal{P}$*).* $\mathcal{N}$ *= množina uzlových proměnných.*

Pak (trojice) $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *se nazývá* **konečný prvek.**
Báze $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k\}$ *prostoru* $\mathcal{P}$ *taková, že* $N_i(\Phi_j) = \delta_{ij}$ *se nazývá* **uzlová báze** $\mathcal{P}$.

Příklad 8.1 *Jednodimenzionální Lagrangeův prvek*
Konečný prvek (K, P, N)*, kde* $K = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathcal{P}$ *je množina lineárních polynomů jedné proměnné,*
$\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$, $N_1(v) = v(0)$, $N_2(v) = v(1)$ $\forall v \in \mathcal{P}$
Báze $\mathcal{P} = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$,

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - x, \quad \Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_1(1) = 0 \\ \Phi_2(x) &= \quad\; x, \quad\;\; \Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_2(1) = 1. \end{aligned}$$

Pak

$$v = \alpha(1-x) + \beta x, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v(0) = \alpha := N_1(v), \quad v(1) = \beta := N_2(v) \qquad \forall v \in \mathcal{P}.$$

9 Eliptické parciální diferenciální rovnice

10 Parabolické parciální diferenciální rovnice

Řešme nyní následující úlohu parabolického typu

$$
\begin{aligned}
u_t - \triangle u &= f \quad \text{v } \Omega \times \mathbb{R}_+ \,, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \,, && (71)\\
u &= 0 \quad \text{na } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \,, && (72)\\
u(.,0) &= u_0 \quad \text{v } \Omega \,. && (73)
\end{aligned}
$$

Variační formulaci jako obvykle získáme tak, že rovnici (71) vynásobíme funkcí $\varphi = \varphi(x)$, takovou, že $\varphi \in \mathcal{C}_0^1$, i.e φ je dostatečně hladká funkce, nulová na hranici Γ, zintegrujeme přes Ω a použijeme Greenovu formuli:

$$(u_t, \varphi) + a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1,\ t \in \mathbb{R}_+ \,, \quad \text{kde}$$

$$a(v, w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w \mathrm{d}x \,, \quad (v, w) = \int_\Omega v\, w \mathrm{d}x \,.$$

Naším cílem je tedy řešit variační úlohu: Hledáme $u = u(x,t) \in H_0^1(\Omega)\ \forall t > 0$ tak, aby

$$
\begin{aligned}
(u_t, \varphi) + a(u, \varphi) &= (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ t \in \mathbb{R}_+ \,,\\
u(.,0) &= v \quad \text{v } \Omega \,.
\end{aligned}
$$

Opět lze ukázat, že je-li u klasické řešení, je u i slabé řešení. Naopak, je-li u slabé řešení a $u \in C^2(\Omega),\ t > 0$, pak u je klasické řešení.

10.1 Metoda konečných prvků pro parabolickou rovnici

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená, konvexní oblast s hladkou hranicí Γ.

V prvním kroku aproximujeme řešení $u(x,t)$ funkcí $u_h(x,t)$, která je pro každé pevné t po částech lineární funkcí na triangulaci $\mathcal{T}_h = \{K\}$ oblasti Ω. Prostor S_h bude opět prostor spojitých, po trojúhelnících lineárních funkcí, nulových na hranici Γ oblasti Ω. Jeho dimenze je rovna počtu vnitřních uzlů $\mathcal{T}_h$, označme tyto uzly $\{P_j\}_{j=1}^{M_h}$. Za bázi S_h zvolíme opět "stanové" funkce: $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h \,, \quad \Phi_i(P_j) = \delta_{ij}$.

Uveďme nejprve slabou formulaci, při níž diskretizujeme naši úlohu pouze v proměnné x. Jde o tzv. prostorově semidiskrétní problém:

$$? \ u_h(t) = u_h(.,t) \in S_h \quad \forall t \geq 0 \ :$$

$$
\begin{aligned}
((u_h)_t, \chi) + a(u_h, \chi) &= (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h,\ t > 0 && (74)\\
u_h(0) &= v_h \,, && (75)
\end{aligned}
$$

kde $v_h \in S_h$ je aproximace funkce v (viz. počáteční podmínka).
Ekvivalentně

$$? \text{ koeficienty } \alpha_j(t): \quad u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x) \quad \text{tak, aby}$$

$$\sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j'(t)(\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) a(\Phi_j, \Phi_k) = (f(t), \Phi_k)\,, \quad k = 1, \ldots, M_h\,,$$

$$\alpha_j(0) = \gamma_j\,, \quad j = 1, \ldots, M_h\,,$$

kde γ_j jsou uzlové hodnoty aproximace v_h funkce v (viz počáteční podmínka zadaná v čase $t = 0$). Maticově:

$$\mathbf{B}\alpha'(t) + \mathbf{A}\alpha(t) = \mathbf{b}(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{76}$$

$$\alpha(0) = \gamma\,, \tag{77}$$

kde $\mathbf{B} = (b_{kj})\,,\ b_{kj} = (\Phi_j, \Phi_k)\,,$ je tzv. hmotová matice (mass matrix), $\mathbf{A} = (a_{kj})\,, \quad a_{kj} = a(\Phi_j, \Phi_k)$ je příslušná matice tuhosti (stiffness matrix), $\mathbf{b} = (b_k)\,, \quad b_k = (f, \Phi_k)$ je vektor pravé strany a konečně $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{M_h}(t))^{\mathrm{T}}$ je vektor hledaných koeficientů.

Poznamenejme, že v tomto případě jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ symetrické, positivně definitní, tedy existuje $\mathbf{B}^{-1}$. Rovnice (76), (77) můžeme přepsat:

$$\alpha'(t) + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t)\,, \quad t > 0\,,$$

$$\alpha(0) = \gamma\,,$$

Tato soustava má pro $t > 0$ jediné řešení.

Zmiňme se ještě krátce o několika metodách úplné diskretizace (v prostoru i v čase) naší parabolické úlohy.

1. Zpětná Eulerova-Galerkinova metoda
Nechť k je časový krok, $U^n \in S_h$ aproximace $u(t)$ v čase $t = t_n = n \cdot k$.

Metoda spočívá v nahrazení derivace $(u_h)_t$ v rovnici (74) zpětným diferenčním kvocientem

$$\overline{\partial}_t U^n = k^{-1}(U^n - U^{n-1})\,,$$

což vede na úlohu

$$(\overline{\partial}_t U^n, \chi) + a(U^n, \chi) = (f(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h,\ n \geq 1\,,$$

$$U^0 = v_h\,.$$

Známe-li už U^{n-1}, vyjádříme U^n z této rovnice, a dále vyjádříme U^n pomocí báze S_h:

$$U^n(x) = \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j^n \Phi_j(x).$$

Pro $n-$tou iteraci vektoru α^n a pro počáteční aproximaci $\alpha^0 = \gamma$ dostaneme soustavu

$$(\mathbf{B} + k\mathbf{A})\alpha^n = \mathbf{B}\alpha^{n-1} + k\mathbf{b}^n\,, \quad n \geq 1\,.$$

Metoda je numericky stabilní bez ohledu na vztah mezi h a k.

2. Eulerova-Galerkinova metoda vpřed
Derivaci $(u_h)_t$ v rovnici (74) nahradíme diferencí vpřed:

$$\partial_t U^n = \frac{1}{k}(U^{n+1} - U^n)\,.$$

Analogicky jako pro zpětnou metodu odvodíme výslednou rovnici pro $n-$tou iteraci:

$$\mathbf{B}\alpha^{n+1} = (\mathbf{B} - k\mathbf{A})\alpha^n + k\mathbf{b}^n\,, \quad n \geq 0\,.$$

Metoda není pro libovolnou volbu k a h numericky stabilní. Její stabilita závisí na největším vlastním čísle diskrétního Jacobiánu.

3. Crank-Nicolson-Galerkinova metoda
Semidiskrétní rovnice je diskretizována v čase symetricky kolem bodu

$$t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})k\,.$$

11 Reakčně-difúzně-konvekční rovnice

V tomto odstavci se budeme zabývat numerickým řešením reakčně-difúzně-konvekčních rovnic, přesněji rovnic lineární konvekce a difuze s nelineární chemickou reakcí. Matematicky je časový vývoj chemických nebo biologických dějů popsán parciálními diferenciálními rovnicemi odvozenými obvykle z hmotnostní bilance.

Uvažujme koncentraci $u(x,t)$ chemické látky, kde $x \in \mathbb{R}$ je prostorová proměnná, $t \geq 0$ je časová proměnná. Nechť $h > 0$ je nějaké malé číslo. Uvažujme průměrnou koncentraci $\overline{u}(x,t)$ na intervalu $\langle x - \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h\rangle$,

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} u(s,t)\mathrm{d}s = u(x,t) + \frac{1}{24}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \cdots\,.$$

Nechť se látka šíří médiem rychlostí $a(x,t)$. Z hmotnostní bilance dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u}(x,t) = \frac{1}{h}\left[a(x - \frac{1}{2}h,t)u(x - \frac{1}{2}h,t) - a(x + \frac{1}{2}h,t)u(x + \frac{1}{2}h,t)\right]\,.$$

Pak pro $h \longrightarrow 0$ platí pro koncentraci

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u(x,t)) = 0\,.$$

Tato rovnice se nazývá rovnicí konvekce.

Obdobně popišme efekt difúze. Rovnice difúze má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)\,,$$

kde $d(x,t)$ je difúzní koeficient.

Koncentrace $u(x,t)$ se také mění vlivem zdroje a chemické reakce, což zapíšeme jako

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = f(x,t,u(x,t))\,.$$

Zkombinujeme-li efekt konvekce, difúze a chemické reakce, dostaneme reakčně-difúzně-konvekční rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u(x,t)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) + f(x,t,u(x,t))\,. \tag{78}$$

Budeme řešit rovnici (78) na intervalu $\Omega \in \mathbb{R}$ pro čas $t > 0$. Bude dána počáteční podmínka $u(x, 0)$ a vhodné okrajové podmínky.

Rovnici (78) obvykle zapisujeme ve tvaru (vynecháváme závislost u na x a parciální derivace zapisujeme pomocí indexů)

$$u_t + (au)_x = (du_x)_x + f(u)\,. \tag{79}$$

V rovnici (79) předpokládáme, že koeficienty konvekce $a(x, t)$ a difúze $d(x, t)$ jsou dány a jsou nezávislé na koncentraci $u(x, t)$, a tedy konvekční a difúzní člen je lineární.

11.1 Modelová reakčně-difúzně-konvekční rovnice

Zkoumejme nejprve jednodimenzionální konvekčně-difúzní rovnici

$$u_t + au_x = du_{xx}\,, \tag{80}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $d \geq 0$ jsou konstanty, $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$ a s periodickou okrajovou podmínkou

$$u(x \pm 1, t) = u(x, t)\,. \tag{81}$$

S touto okrajovou podmínkou stačí řešit rovnici na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a pak "slepit" $x = 0$ a $x = 1$.

Poznamenejme, že je-li $u(x, t)$ koncentrace, pak integrál

$$M(t) = \int_0^1 u(x, t)\mathrm{d}x$$

reprezentuje hmotu na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ v čase t. Řešení konvekčně-difúzní rovnice splňují princip maxima

$$\min_{0\leq\xi\leq 1} u(\xi, 0) \leq u(x, t) \leq \max_{0\leq\xi\leq 1} u(\xi, 0)\,, \tag{82}$$

a tedy konkrétně je-li $u(x, 0) \geq 0$, pak $u(x, t) \geq 0$ pro všechna x.

Je-li v rovnici (80) $a = 0$, dostaneme tzv. rovnici vedení tepla.

V praktických aplikacích řešíme většinou vícedimenzionální úlohy s proměnlivými koeficienty. Například obdoba rovnice (80) ve třech dimenzích má tvar

$$u_t = (a_1u)_x + (a_2u)_y + (a_3u)_z = (d_1u_x)_x + (d_2u_y)_y + (d_3u_z)_z\,. \tag{83}$$

Budeme používat značení z klasické vektorové analýzy: $\underline{a} \cdot \underline{b}$ je Euklidovský skalární součin vektorů $\underline{a},\ \underline{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{grad}u \equiv \nabla u = (u_x, u_y, u_z)^{\mathrm{T}}\,,$$

divergence diferencovatelné vektorové funkce $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$

$$\mathrm{div}\underline{a} \equiv \nabla \cdot \underline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\,.$$

Dále $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ je Laplaceův operátor,

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,.$$

Vícedimensionální konvekčně-difúzní rovnici (83) pak přepíšeme ve tvaru

$$u_t + \nabla \cdot (\underline{a}u) = \nabla \cdot (D\nabla u)\,, \tag{84}$$

kde D je diagonální matice, $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$.

Je-li $a = 0$, pak difúzní rovnice

$$u_t = \nabla \cdot (D\nabla u) \tag{85}$$

je tzv. (vícedimenzionální) rovnice vedení tepla.

Uvažujme nyní r chemických reakcí mezi s prvky U_i, $i = 1, \ldots, s$, s koncentracemi u_i. Předpokládejme, že s prvků reaguje současně v r reakcích

$$\sum_{i=1}^{s} l_{ij} U_i \xrightarrow{k_j} \sum_{i=1}^{s} r_{ij} U_i\,, \qquad j = 1, \ldots, r\,, \tag{86}$$

kde l_{ij}, r_{ij} jsou stoichiometrické koeficienty, $k_j > 0$ je řád chemické reakce a nechť rychlost $j-$té reakce

$$g_j(t, u) = k_j(t) \prod_{n=1}^{s} (u_n)^{l_{nj}}\,,$$

je přímo úměrná součinu všech koncentrací na levé straně reakce. Pro všechny reakce prvku U_i dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$u_i'(t) = \sum_{j=1}^{r} (r_{ij} - l_{ij}) g_j(t, u(t))\,, \qquad i = 1, \ldots, s\,,$$

kterou pro $u = (u_1, \ldots, u_s)^{\mathrm{T}}$ přepíšeme

$$u'(t) = Sg(t, u(t))\,, \qquad u(0) \text{ dáno}\,, \tag{87}$$

kde S je $s \times r$ stoichiometrická matice a $g(t, u) = (g_j(t, u)) \in \mathbb{R}^r$.

Spojíme-li konvekčně-difúzni rovnici (84) s obecným reakčním systémem (87), dostaneme obecnou reakčně-difúzně-konvekční rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j + \nabla \cdot (\underline{a}_j u_j) = \nabla \cdot (D_j \nabla u_j) + f_j(u)\,, \qquad j = 1, \ldots, s\,, \tag{88}$$

kde $\underline{a}_j = (a_{j1}, a_{2j}, a_{3j})^{\mathrm{T}}$ je vektor rychlostí pro koncentrace prvků u_j a D_j je odpovídající difúzní matice. Připomeňme, že $u = (u_1, \ldots, u_s)^{\mathrm{T}}$ reprezentuje vektor koncentrací prvků, a že s rovnic je "zkaplováno" nelineární chemickou reakcí.

Numerickým řešením těchto rovnic pomocí metody konečných prvků se nyní budeme zabývat.

11.2 Jednodimenzionální metoda konečných prvků

Připomeňme, že přibližná řešení diferenciálních rovnic získaná metodou konečných prvků jsou spojitá, a tedy umožňují zjistit přibližnou hodnotu řešení v libovolném bodě dané oblasti a na její hranici.

Nechť $w^h(x, t) \approx u(x, t)$ je taková aproximace řešení, že pro každé pevné t leží funkce $w^h(\cdot, t)$ v konečnědimenzionálním prostoru funkcí. Vybereme v tomto prostoru bázové funkce $\varphi_j(x)$. Pak $w^h(x, t)$ je lineární kombinací těchto bázových funkcí:

$$w^h(x, t) = \sum_j w_j(x) \varphi_j(x)\,.$$

Bázové funkce volíme jako po částech polynomiální funkce s kompaktním nosičem, [2], [8], [7]. Zde pro jednoduchost budeme obvykle volit bázové funkce spojité, po částech lineární.

11.2.1 Stacionární úlohy

Pro jednoduchost uvažujme nejprve konvexně–difúzní časově nezávislou rovnici v jedné dimenzi

$$au_x = du_{xx} - cu + s(x), \qquad 0 < x < 1\,, \tag{89}$$

s lineárním reakčním zdrojem $-cu + s(x)$ a konstantními koeficienty $a \in \mathbb{R}$, $d, c \geq 0$. Okrajové podmínky uvažujme například

$$u(0) = \gamma_0\,, \qquad u_x(1) = 0\,. \tag{90}$$

Až dosud jsme se nezabývali prostorem funkcí, ve kterém hledáme řešení. Klasické řešení rovnice (89) by vyžadovalo řešení u se dvěmi spojitými derivacemi na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Budeme řešit slabou formulaci problému, [7], [2], [8], [6], [3]. Vynásobíme rovnici (89) testovací funkcí v splňující $v(0) = 0$ a zintegrujeme per partes. Dostaneme

$$\int_0^1 (du_x(x)v_x(x) + au_x(x)v(x) + cu(x)v(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 s(x)v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Toto lze jednoduše zapsat jako

$$[u, v] = (s, v)\,,$$

kde skalární součin $(\cdot, \cdot)$ a bilineární forma $[\cdot, \cdot]$ jsou definovány předpisem

$$(w, v) = \int_0^1 w\,v\mathrm{d}x\,, \quad [w, v] = \int_0^1 (dw_xv_x + aw_xv + cwv)\mathrm{d}x\,. \tag{91}$$

Prostorem funkcí, ve kterém je definován uvedený skalární součin $(\cdot, \cdot)$, je prostor $\mathrm{L}_2[0, 1]$, což je prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tj. funkcí v, pro které je $\int_0^1 v^2\mathrm{d}x < \infty$. Tyto funkce nemusí být spojité, ale pro jednoduchost budeme předpokládat, že jsou nespojité v nejvýše konečném počtu bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Bilineární formu uvažujme na prostoru

$$\mathcal{H} = \{v : v \in \mathcal{C}^0\langle 0, 1\rangle,\ v_x \in \mathrm{L}_2[0, 1]\}\,.$$

Toto je nejjednodušší příklad Sobolevova prostoru, viz odstavec 3.6.3. Další podrobnosti najde čtenář např. v [1], [3], [2], [7]. Nechť nyní

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{H} : v(0) = \gamma_0\}\,, \quad \mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{H} : v(0) = 0\}\,. \tag{92}$$

Slabá formulace úlohy (89): hledáme $u \in \mathcal{V}$ tak, aby

$$[u, v] = (s, v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}_0. \tag{93}$$

Řešení $u \in \mathcal{V}$ úlohy (93) je slabé řešení úlohy (89). Je-li $d(x) \geq d_0 > 0$ a $c(x) - \frac{1}{2}a'(x) \geq 0$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, $s \in \mathrm{L}_2[0, 1]$, pak existuje právě jedno slabé řešení $u \in \mathcal{V}$ úlohy (93), viz odstavec 4.1.

Povšimněme si ještě speciálního případu, kdy v rovnici (89) je $a = 0$. Pak bilineární forma

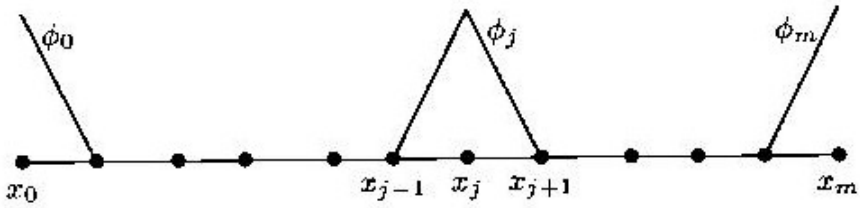
$$[w, v] = \int_0^1 (dw_xv_x + cwv)\mathrm{d}x$$

je symerická, positivně definitní, koercivní, omezená a indukuje na prostoru $\mathcal{V}_0$ energetickou normu (31), kterou později využijeme při odhadech chyby řešení, viz. (97).

Nechť $s \in \mathrm{L}_2[0,1]$. Je-li u klasickým řešením problému (89), (90), pak bude jistě splňovat rovnici (93), a tedy bude i slabým řešením. Naopak, je-li u dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a splňuje rovnici (93), lze ukázat, že splňuje rovnice (89), (90), tedy dostatečně hladké slabé řešení je i klasickým řešením daného problému, [2], [6], [3], [7]. Zdůrazněme nicméně, že slabé řešení (93) nemusí být dvakrát spojitě diferencovatelné, stačí požadovat $u \in \mathcal{H}$.

Homogenní Neumannovu okrajovou podmínku $u_x(1) = 0$ v bodě $x = 1$ jsme využili pouze v integraci per partes při odvozování slabé formulace (93). Homogenní Neumannova okrajová podmínka se někdy nazývá přirozenou okrajovou podmínkou. Dirichletovy okrajové podmínky, které musí být zabudovány do definice aproximačního prostoru $\mathcal{V}_0$, se obvykle nazývají esenciální okrajové podmínky. Kdybychom předpokládali nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky, vznikl by nám při integraci per partes další člen na pravé straně rovnice (93).

Předpokládejme nyní, že numerická aproximace řešení w^h je po částech lineární. Nechť $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, $x_0 = 0$, $x_m = 1$, jsou uzlové body sítě na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, $\mathcal{H}^h$ je množina spojitých po částech lineárních funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, které jsou lineární na každém intervalu (x_j, x_{j+1}). Uvažujme tzv. stanové funkce $\varphi_j(x) \in H^h$, $j = 1, \ldots, m$, pro které platí, že $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ (pro $i = j$ je $\delta_{ij} = 1$, pro $i \neq j$ je $\delta_{ij} = 0$). Tyto funkce generují konečnědimensionální prostor funkcí $\mathcal{H}^h$, [6], [3], [2], [7].



Stanové bázové funkce $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$

Nechť $\mathcal{V}^h$ a $\mathcal{V}_0^h$ je restrikce $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}_0$ na prostor $\mathcal{H}^h$.
Numerická aproximace slabého řešení (93): hledáme $w^h \in \mathcal{V}^h$ tak, aby

$$[w^h, v^h] = (s, v^h) \qquad \forall v^h \in \mathcal{V}_0^h. \tag{94}$$

Prostor $\mathcal{V}^h$ a prostor testovacích funkcí $\mathcal{V}_0^h$ jsou navzájem posunuty o γ_0, jinak se neliší. Metoda konečných prvků s touto vlastností prostorů $\mathcal{V}^h$ a $\mathcal{V}_0^h$ se obecně nazývá Galerkinova (Bubnovova–Galerkinova) metoda.

Přepišme nyní rovnici (94) pomocí bázových funkcí φ_j:

$$w^h(x) = \sum_{j=0}^{m} w_j \varphi_j(x)\,,$$

a nechť testovací funkcí v_h je také funkce φ_j, $j = 1, \ldots, m$. Z rovnice (94) dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty $w_1, \ldots, w_m$:

$$\sum_{k=0}^{m} [\varphi_k, \varphi_j] w_k = (s, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{95}$$

s rovnicí pro splnění okrajové podmínky $w_0 = \gamma_0$.

Vypočtěme prvky $[\varphi_k, \varphi_j]$. Je-li $|k-j| > 1$, pak $[\varphi_k, \varphi_j] = 0$. Připusťme, že dělení intervalu není rovnoměrné. Položme

$$\Delta_j = x_j - x_{j-1}, \qquad h_j = \frac{1}{2}(\Delta_j + \Delta_{j+1}) = \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1}).$$

Diskretizaci (derivace jsme nahradili centrálními diferencemi) ve vnitřních dělicích bodech intervalu $\langle 0, 1\rangle$ zapíšeme ve tvaru, [6]:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2h_j}(-w_{j-1} + w_{j+1}) - \frac{d}{h_j}\left(\frac{1}{\Delta_j}w_{j-1} - (\frac{1}{\Delta_j} + \frac{1}{\Delta_{j+1}})w_j + \frac{1}{\Delta_{j+1}}w_{j+1}\right) + \\ + \frac{c}{6h_j}(\Delta_j w_{j-1} + 4h_j w_j + \Delta_{j+1}w_{j+1}) \quad = \frac{1}{h_j}(s, \varphi_j). \end{aligned} \tag{96}$$

Předpokládáme-li, že také zdroj $s(x)$ je po částech lineární funkcí,

$$s(x) = \sum_k s_k \varphi_k(x)\,,$$

pak na pravé straně rovnice (96) dostaneme

$$\frac{1}{h_j}(s, \varphi_j) = \frac{1}{6h_j}(\Delta_j s_{j-1} + 4h_j s_j + \Delta_{j+1}s_{j+1})\,.$$

Zmiňme se ještě o odhadech chyb řešení.
Nechť v rovnici (89) je $d > 0$ a $c \geq 0$. Pak

$$||v||_* = \left(\int_0^1 (dv_x^2 + cv^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{97}$$

je energetická norma na prostoru $\mathcal{V}_0$. Připomeňme, že $||v|| = (v, v)^{1/2}$ je L_2-norma funkce v. Lze ukázat, že bilineární forma $[\cdot, \cdot]$ je omezená:

$$[v, w] \leq C_1||v||_*||w||_* \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_0\,, \quad C_1 > 0\,, \tag{98}$$

a koercivní

$$[v, v] \geq C_2||v||_*^2 \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_0\,, \quad C_2 > 0\,. \tag{99}$$

Poznamenejme, že v případě $a = 0$ je v (98) a v (99) $C_1 = C_2 = 1$.
Protože v našem případě je $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{V}_0^h \subset \mathcal{V}_0$ říkáme, že naše metoda konečných prvků je konformní.

Pro odhad chyby platí v energetické normě odhad

$$||u - w^h||_* \leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v^h \in \mathcal{V}^h} ||u - v^h||_*\,, \tag{100}$$

tedy v energetické normě je pro chybu $u - w^h$ určující, jak dobře umíme u aproximovat ve $\mathcal{V}^h$. Konvergence v energetické normě je prvního řádu, výhodou našeho odhadu je, že platí i pro nerovnoměrné dělení. V L_2 normě lze dokázat konvergenci 2. řádu, [2], [3], [10], [7], [6], [1].

11.2.2 Časově závislé problémy

Uvažujme problém

$$u_t + au_x = du_{xx} - cu + s(x,t)\,, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T\,, \tag{101}$$

s danou počáteční podmínkou $u(x,0)$ a s okrajovými podmínkami (90). Na člen u_t můžeme pohlížet jako na zdrojový člen, tj. jednoduše místo s dosadit $\overline{s} := s - u_t$. Pro $u(\cdot,t) \in \mathcal{V}$ pro všechna $t \in \langle 0,T\rangle$ dostaneme slabou formulaci problému (101)

$$(u_t, v) + [u,v] = (s,v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}_0,\ 0 < t \le T\,. \tag{102}$$

Numerická aproximace $w^h(x,t)$ musí splňovat

$$(w_t^h, v^h) + [w^h, v^h] = (s, v^h) \qquad \forall v^h \in \mathcal{V}_0^h,\ 0 < t \le T\,, \tag{103}$$

a dále počáteční podmínku $w^h(x,0) = u_0^h(x)$, kde $u_0^h \in \mathcal{V}^h$ je vhodná representace funkce $u(x,0)$.

Rozepíšeme w^h pomocí bázových funkcí φ_j

$$w^h(x,t) = \sum_{j=0}^{m} w_j(t)\varphi_j(x)\,, \tag{104}$$

koeficienty $w_j(t)$ jsou časově závislé. Diskrétní slabá formulace (103) dává soustavu podobnou soustavě (96), ale na levé straně dostaneme ještě časové derivace, [3], [6], [2], [7]:

$$\frac{1}{h_j}(w_t^h, \varphi_j) = \frac{1}{6h_j}(\Delta_j w'_{j-1}(t) + 4h_j w'_j(t) + \Delta_{j+1} w'_{j+1}(t))\,. \tag{105}$$

Označíme-li $w(t) = (w_j(t))_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$, pak tzv. semidiskrétní soustavu pro homogenní okrajové podmínky můžeme zapsat ve tvaru, see [6], [3], [7],

$$Bw'(t) = Aw(t) + Bg(t)\,, \tag{106}$$

kde

$$A = (a_{jk}) = -\left([\varphi_k, \varphi_j]\right)_{j,k=1}^m\,, \qquad B = (b_{jk}) = \left((\varphi_k, \varphi_j)\right)_{j,k=1}^m\,; \tag{107}$$

po částech lineární zdrojový člen je $g(t) = (s_j(t))_{j=1}^m$.

Nehomogenní okrajové podmínky přidají další členy k první a poslední komponentě $g(t)$. V teorii konečných prvků se matice B obvykle nazývá hmotová matice (mass matrix). Matici A říkáme matice tuhosti (stiff matrix).

Poznamenejme, že v rovnici (106) bychom mohli aproximovat také derivaci $w'(t)$,

$$\frac{1}{h_j}(w_t^h, \varphi_j) \approx w'_j(t).$$

Dostali bychom semidiskrétní soustavu

$$w'(t) = Aw(t) + Bg(t).$$

Tento proces nahrazení $Bw'(t)$ derivací $w'(t)$ se v literatuře nazývá "mass lumping", [6]. Může mít negativní vliv na přesnost řešení.

Pro odhad chyby lze obdobně jako ve stacionárním případě dokázat v L_2 normě konvergenci 2. řádu. Podrobnosti najde čtenář např. v [2], [3], [10], [6].

Poznamenejme ještě, že dominuje-li v rovnici konvekční člen, může standardní Galerkinova metoda konečných prvků vést k oscilacím v prostorové proměnné. Pak je třeba aplikovat Petrovovu–Galerkinovu metodu, ve které se prostor, v němž hledáme aproximaci řešení, neshoduje s prostorem testovacích funkcí, [6].

11.3 Vícedimenzionální úlohy

Standardní reakčně-difúzně-konvekční rovnici ve vícedimenzionálním prostoru lze zapsat ve tvaru

$$u_t + \sum_{k=1}^{d} (a_k u)_{x_k} = \sum_{k=1}^{d} (d_k u_{x_k})_{x_k} + s(\underline{x}, t)\,, \tag{108}$$

kde $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)^{\mathrm{T}} \in R^d$. Zdrojová část může obsahovat i nelineární reakční členy (pak $s = s(\underline{x}, t, u)$) a další nelinearity se mohou skrývat v konvekčním nebo difuzním členu. Obecný tvar reakčně-difúzně-konvekční rovnice je tedy:

$$u_t + \nabla \cdot (\underline{a} u) = \nabla \cdot (D \nabla u) + s(\underline{x}, t)\,, \tag{109}$$

kde $\underline{a} = (a_k) \in \mathbb{R}^d$, $D = \mathrm{diag}(d_k)$.

My se omezíme na dvoudimenzionální úlohy, konkrétně na příklad dvoudimenzionální rovnice vedení tepla s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

11.3.1 Vedení tepla ve dvou dimenzích

Uvažujme dvoudimenzionální rovnici vedení tepla se zdrojem a s Dirichletovými okrajovými podmínkami na jednotkovém čtverci.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} + s(x, y, t) \quad \text{na } \Omega, \\ u(x, y, t) &= u_\Gamma(x, y, t) \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \qquad \text{na } \Omega\,, \end{aligned} \tag{110}$$

kde $t > 0$ a $(x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Prostorové derivace nahradíme standardními diferencemi 2. řádu na pravoúhlé síti a dostaneme lineární semidiskrétní soustavu

$$w'(t) = Aw(t) + g(t)\,.$$

Matice A má dvě části, $A = A_1 + A_2$, kde A_1 "působí" ve směru osy x, A_2 ve směru osy y. Jak A_1, tak A_2 jsou v podstatě matice hodnosti 1.

Proberme si vše podrobněji. Uvažujme pravoúhlou síť Ω_h na Ω,

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y, 1 \le i \le m_1,\ 1 \le j \le m_2\}\,,$$

kde $\Delta x = (m_1 + 1)^{-1}$, $\Delta y = (m_2 + 1)^{-1}$. Předpokládejme, že uzly jsou na Ω_h číslovány po řádcích, vektory leží v prostoru $\mathbb{R}^M$, kde $M = m_1 m_2$. Na Ω_h definujeme funkci $w : \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^M$ takovou, že

$$w = (w_1^{\mathrm{T}}, \ldots, w_{m_2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^M\,, \text{ kde } \quad w_j = (w_{1j}, \ldots, w_{m_1 j})^{\mathrm{T}} \in R^{m_1}, \quad w_{ij}(t) \approx u(x_i, y_j, t)\,. \tag{111}$$

Označme I_m jednotkovou matici typu $m \times m$, nechť B_m je matice diskretizace jednodimenzionálního operátoru difuze pro m vnitřních bodů a pro Dirichletovy okrajové podmínky,

$$B_m = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}\,, \quad h = \frac{1}{m+1}\,.$$

Matice A, A_1, A_2 můžeme přepsat ve tvaru

$$A = A_1 + A_2\,, \quad A_1 = I_{m_2} \bigotimes B_{m_1}\,, \quad A_2 = B_{m_2} \bigotimes I_{m_1}, \tag{112}$$

kde $\bigotimes$ je Kroneckerův direktní součin. Pro hodnoty na hranici je

$$b(t) = b_1(t) + b_2(t) \in \mathbb{R}^M\,,$$

přičemž $b_1(t)$ má nenulové složky $\Delta x^{-2} u_\Gamma(x \pm \Delta x, y, t)$ v bodech $(x, y) \in \Omega_h$, které sousedí se dvěma vodorovnými částmi hranice, jinde je $b_1(t)$ nulová. Obdobně $b_2(t)$ má nenulové složky $\Delta y^{-2} u_\Gamma(x, y \pm \Delta y, t)$ v bodech $(x, y) \in \Omega_h$ sousedících se dvěma svislými částmi hranice, jinde je $b_2(t)$ nulová. Nechť $f(t)$ je restrikce funkce $s(x, y, t)$ na Ω_h. Pak

$$g(t) = b(t) + f(t) \in \mathbb{R}^M\,. \tag{113}$$

Nyní máme definovány všechny členy v semidiskrétním formulaci $w'(t) = Aw(t) + g(t)$. Matice A_1, A_2 a A jsou symetrické. Stabilitu semidiskrétní formulace v L_2-normě určíme tedy ze spektra matice A, [6], [3], [2] .

11.3.2 Metoda konečných prvků

Řešme rovnici (109) pro $t > 0$, pro danou počáteční podmínku $u_0(\underline{x})$ a okrajové podmínky

$$u = \gamma_0(\underline{x}) \quad \text{na } \Gamma_0\,, \qquad \underline{n} \cdot (\underline{a}u - D\nabla u) = \gamma_1(\underline{x}) \quad \text{na } \Gamma_1\,, \tag{114}$$

kde $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ je hranice Ω a $\underline{n}$ je vektor vnější normály k této hranici.

Nejprve odvodíme slabou formulaci (93) pro slabé řešení u našeho problému. Pak budeme hledat po částech lineární aproximaci w^h tohoto slabého řešení.

Zaveďme L_2-skalární součin funkcí v, w nebo vektorových funkcí $\underline{f}, \underline{g}$ na Ω:

$$(w, v) = \int_\Omega w\, v \mathrm{d}\Omega\,, \qquad (\underline{g}, \underline{f}) = \int_\Omega \underline{g} \cdot \underline{f} \mathrm{d}\Omega\,.$$

Připomeňme, že integrace per-partes (Greenova formule) v tomto případě dává, viz např. [2], [10], [11], [16], [13],

$$(\nabla \cdot \underline{f}, v) = -(\underline{f}, \nabla v) + \int_{\partial\Omega} (\underline{f} \cdot \underline{n}) v \mathrm{d}\Gamma.$$

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor funkcí u spojitých na Ω, takových, že $\nabla u \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, dále

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{H} :\ v = \gamma_0 \text{ na } \Gamma_0\}, \qquad \mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{H} :\ v = 0 \text{ na } \Gamma_0\}\,.$$

Uvažujme bilineární formu (není symetrická)

$$[w, v] = (D\nabla w - \underline{a}w, \nabla v)$$

a funkcionál

$$G(v) = (s, v) - \int_{\Gamma_1} \gamma_1 v \mathrm{d}\Gamma\,.$$

Rovnici (108) vynásobíme testovací funkcí $v \in \mathcal{V}_0$, zintegrujeme per partes a dostaneme slabou formulaci úlohy (108), (114):
Hledáme $u(\cdot, t) \in \mathcal{V}$ tak, aby

$$(u_t, v) + [u, v] = G(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0\,,\ t > 0\,. \tag{115}$$

Máme-li triangulaci Ω, je Galerkinova metoda konečných prvků určena výběrem bázových funkcí. Nechť $\underline{x}_j$ jsou uzly triangulace Nejjednodušší báze je tvořena po částech lineárními stanovými (pyramidálními) funkcemi φ_i, které jsou lineární na každém trojúhelníku a splňují

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}\,.$$

Nechť v indexových množinách $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}$ je uloženo číslování uzlů: $j \in I_0$ jestliže $\underline{x}_j \in \Gamma_0$ a $j \in \mathcal{I}$, jestliže $\underline{x}_j \in \Omega \cup \Gamma_1$. Formulace metody konečných prvků je nyní analogická jako v jedné dimenzi. Položme

$$w^h(\underline{x}, t) = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_1} w_j(t)\varphi_j(x)\,, \tag{116}$$

$$w_j(t) = \gamma_0(\underline{x}_j) \quad \text{pro} \quad j \in \mathcal{I}_0\,. \tag{117}$$

Ostatní $w_j(t)$ získáme vyřešením semidiskrétní soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0} (\varphi_j, \varphi_i) w_j'(t) = -\sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0} [\varphi_j, \varphi_i] w_j(t) + G(\varphi_i)\,, \quad i \in \mathcal{I}\,, \tag{118}$$

s počátečními podmínkami $w_j(0) = u_0(\underline{x}_j)$, $j \in \mathcal{I}$. Formulace zahrnuje i případ, kdy funkce γ_0, γ_1 definující okrajové podmínky jsou funkcemi času.

Poznámka k literatuře zabývající se metodou konečných prvků
Zájemce, kteří opravdu pracují s metodou konečných prvků, odkazujeme na širokou škálu literatury. Doporučit lze například knihu [10], v níž čtenář najde jednak základy funkcionální analýzy, dále metodu konečných diferencí a metodu konečných prvků, včetně některých technických detailů. Mezi matematiky je asi nejpopulárnější kniha [2], která obsahuje velké množství matematického aparátu včetně přehledné teorie Sobolevových prostorů. Obsahuje také velmi podrobné odhady chyb. K podrobnému studiu teorie Sobolevových prostorů je určena kniha [1]. Zmiňme se ještě o knize [8], v níž najde čtenář konkrétní příklady především z mechaniky kontinua a dále velké množství technických detailů potřebných pro algoritmizaci, jako je popis různých tvarů konečných prvků nebo podrobný popis transformací na referenční prvky. Jednou z nejobsáhlejších knih o klasické teorii parciálních diferenciálních rovnic je kniha [11]. Obsahuje mimo jiné i podrobnou teorii distribucí, včetně Diracovy $\delta-$funkce a odvození jejích vlastností. Klasickou učebnicí numerické matematiky je kniha [13]. Inspirací pro napsání tohoto příspěvku byla především kniha [6], která se mj. velmi podrobně zabývá metodou konečných prvků a metodou konečných objemů pro reakčně-difúzně-konvekční rovnice. Velmi inspirativní je také kniha [3].

Ve sborníku [7] byl uveden příspěvek, který stručně popisoval matematické základy metody konečných prvků, tak, jak jsou probírány v přednášce Metody aplikované matematiky na VŠCHT, Praha.

12 Víceúrovňové metody

12.1 Metoda prosté iterace

Soustava

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{F}\,, \tag{119}$$

$\mathbf{S}\ldots$ matice tuhosti, symetrická, positivně definitní $\Longrightarrow$ vlastní čísla λ matice $\mathbf{S}$ jsou reálná kladná:

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max} < \infty$$

$\mathbf{x}$ řešení $\Longrightarrow \quad \mathbf{Sx} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$, a tedy také

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tau(\mathbf{Sx} - \mathbf{F}) \text{ pro libovolné } \tau \in \mathbb{R}\,. \tag{120}$$

Metoda prosté iterace:
Dáno $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, $\tau \in \mathbb{R}$ nenulový parametr.
Definujeme posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ takto:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \tau(\mathbf{Sx}^{(n)} - \mathbf{F})\,. \tag{121}$$

Jestliže $\mathbf{x}^{(n)} \longrightarrow \mathbf{x}$ pro $n \longrightarrow \infty \Longrightarrow \mathbf{x}$ řeší soustavu (119).

Parametr $\tau \neq 0$ lze zvolit tak, aby posloupnost $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ konvergovala pro lobovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$.

Označme $\varepsilon^{(n)} := \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}$ vektor chyby $n-$té iterace. Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} + \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} + \tau\mathbf{F} \end{aligned}$$

Na pravé straně rovnice dosadíme za $(\mathbf{x})$ z formule (120):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} + \tau\mathbf{Sx} - \tau\mathbf{F} + \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - (I - \tau S)\mathbf{x} \;=\; (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}) \\ \varepsilon^{(n+1)} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\varepsilon^{(n)} \end{aligned}$$

Tedy

$$\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n\ \varepsilon^{(0)}\,,$$

kde $\varepsilon^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}$ je chyba počáteční aproximace.

Chceme zvolit $\tau \neq 0$ tak, aby

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||\varepsilon^{(n)}|| = 0 \quad \text{pro libovolné} \quad \varepsilon^{(0)}\,.$$

Říkáme, že τ je konvergentní parametr.

Dostáváme odhad chyby ($||\cdot||$ je Euklidovská norma)

$$||\varepsilon^{(n)}|| \leq ||(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n|| \cdot ||\varepsilon^{(0)}||\,.$$

Věta 12.1 $\mathbf{S}$ *symetrická, positivně definitní.*
Parametr $\tau \in \mathbb{R}$ *je konvergentní parametr metody prosté iterace* $\Longleftrightarrow$
$0 < \tau < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$, $\lambda_{\max}$ *je největší vlastní číslo matice* $\mathbf{S}$. *Pro toto* τ *je*

$$||(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n|| = c^n(\tau)\,, \qquad \textit{kde} \;\; 0 < c(\tau) < 1\,,$$

konkrétně

$$c(\tau) = \max\{|1 - \tau\lambda_{\max}|,\, |1 - \tau\lambda_{\min}|\}\,, \quad \lambda_{\min} \quad \textit{je nejmenší vlastní číslo matice } \mathbf{S}\,.$$

Poznámka 12.1 *1.* $\mathbf{S}$ *symetrická* $\implies$ $(I-\tau S)^n$ *je také symetrická*

2. *Věta o zobrazení spektra:*
   λ *vlastní číslo,* β *odpovídající vlastní vektor matice* $\mathbf{S}$*:* $\quad \mathbf{S}\beta = \lambda\beta\,, \beta \neq \mathbf{0}$
   $\iff$ β *je vlastní vektor a* $\mu = (1-\tau\lambda)^n$ *vlastní číslo matice* $(\mathbf{I}-\tau\mathbf{S})^n$.
   Tedy vlastní čísla μ *matice* $(I-\tau S)^n$ *spočteme z vlastních čísel* λ *matice* $\mathbf{S}$.

3. *Spektrální poloměr symetrické matice* $\mathbf{A}$*:*

$$|\mathbf{A}| = \max_{i=1,\dots,N} |\mu_i| \;=\; \rho(\mathbf{A})\,, \quad \mu_i \dots \text{ vlastní čísla matice } \mathbf{A}\,.$$

O iteračních metodách se říká, že zhlazují chybu. Ukážeme si to konkrétně na příkladu.

Příklad 12.1 *Vraťme se k příkladu 4.1:*

$$-u'' \;=\; f \quad v \quad \Omega = (0,1)\,,$$
$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Variační formulace:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,,$$
$$a(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\mathrm{d}x\,, \qquad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x\,,$$

$a(v,w)$ *je symetrická, koercivní (positivně definitní).*
Označme $\mathbf{S}_h$ *odpovídající matici tuhosti (*h *je krok dělení intervalu* $\langle 0,1\rangle$*):*

$$\mathbf{S}_h := \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Její vlastní čísla jsou

$$\lambda_k = \frac{2}{h}(1-\cos k\pi h) = \frac{4}{h}\sin^2\frac{k\pi h}{2}, \quad k = 1,2,\dots,N$$

a odpovídající vlastní vektory jsou

$$\psi^{(k)} = (\psi_1^{(k)},\dots,\psi_N^{(k)})\,, \quad \psi_i^{(k)} = \sin k\pi i h\,, \quad i = 1\dots N,\; k = 1,\dots,N\,.$$

Chybu $\quad \varepsilon^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} \quad$ *rozvedeme do vlastních vektorů matice* $\mathbf{S}_h$: *Jestliže*

$$\varepsilon^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \psi^{(k)}\,, \quad \textit{pak}$$

$$\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{I}-\tau\mathbf{S}_h)^n\varepsilon^{(0)} = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\mathbf{I}-\tau\mathbf{S}_h)^n\psi^{(k)} = \sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(1-\tau\lambda_k)^n\psi^{(k)}\,.$$

Tedy souřadnice chyby $\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$ *se po* n *iteracích změní na souřadnice*

$$(\varepsilon_1(1-\tau\lambda_1)^n,\dots,\varepsilon_N(1-\tau\lambda_N)^n) = \text{ souřadnice chyby } \varepsilon^{(n)}\; n-\text{té iterace}\,.$$

Pokud je $|1-\tau\lambda_j|$ *malé číslo, potom* $j-$*tá souřadnice* $\varepsilon_j(1-\tau\lambda_j)^n$ *rychle klesá s rostoucím* n.
Říkáme, že $j-$*tá složka se rychle tlumí.* $\square$

13 Agregační metody

V tomto odstavci se budeme zabývat pouze dvojúrovňovými metodami.

Uvažujme problém diskretizovaný na triangulaci $\mathcal{T}_h$ metodou konečných prvků. Výsledná soustava lineárních algebraických rovnic má tvar

$$\mathbf{A}_h\, u_h = b_h \tag{122}$$

a budeme ji řešit dvoujúrovňovou metodou.

Reference

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier: Sobolev Spaces, 2nd edition, Academic Press/Elsevier, Amsterdam, 2003.

[2] D. Braess: Finite Elements, Cambridge University Press, 1997.

[3] S. C. Brenner, L. R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Elements, Texts in Applied Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1994.

[4] G. H.Golub, C. F. van Loan: Matrix Computations, 3rd ed, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[5] A Greenbaum: Itrative Methods for Solving Linear Systems, SIAM, Philadelphia, 2003.

[6] W. Hundsdorfer, J. Verwer: Numerical solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.

[7] D. Janovská: Stručně o metodě konečných prvků. Sborník prací ze semináře "Reakční a transportní jevy II", Konopiště 8.–11.6.2007, ed. M. Marek, I. Schreiber, L. Schreiberová, Vydavatelství VŠCHT, Praha, 2007, pp. 46–60.

[8] V. N. Kaliakin: Introduction to Approximate Solution Techniques, Numerical Modeling, and Finite Element Methods, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2002.

[9] M. Kubíček, M. Dubcová, D. Janovská: Numerické metody a algoritmy, skripta VŠCHT, 2. vydání, 2005.

[10] S. Larsson, V. Thomée: Partial Differential Equations with Numerical Methods, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 2003.

[11] M. Renardy, R. C. Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1992.

[12] J. Saad: Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd edition), SIAM, Philadelphia, 2003.

[13] J. Stoer, R. Bulirsch: Introduction to Numerical Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1992.

[14] A. E. Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha, 1973.

[15] P. Wesseling: An Introduction to Multigrid Methods, John Wiley & Sons, 1992.

[16] L. Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy, Matfyzpress, Praha, 2002.